Universidade Federal do Paraná – UFPR

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química

Métodos Matemáticos em Engenharia Química

Prof. Éliton Fontana

2019/2

Conteúdo

1 Introdução à Transformada de Laplace **4**

1.1 Integrais Impróprias 5

1.1.1 Integrais com Intervalos Infinitos 6

1.2 Existência da Transformada 9

1.3 Linearidade da Transformada de Laplace 10

1.4 Deslocamento na Frequência 10

1.5 Transformada de Laplace Inversa 14

1.6 Resolução de EDO's com a Transformada de Laplace 16

1.6.1 Transformada de Derivadas e Integrais 17

1.6.2 Resolução de Problemas de Valor Inicial 19

2 EDO's com Forçamentos Descontínuos **26**

2.1 Função Degrau e Deslocamento no Tempo 26

2.1.1 Deslocamento no Tempo 27

2.2 Função Delta de Dirac 30

2.3 EDO's com Forçamentos Descontínuos 32

2.4 Convolução 35

2.4.1 Propriedades da Convolução 36

3 Transformada de Laplace Aplicada à EDP's **39**

4 Séries de Fourier **44**

4.1 Funções com período 2π 45

4.2 Funções com período arbitrário 47

4.2.1 Fórmulas de Euler-Fourier 48

4.3 Funções Pares e Ímpares 50

4.3.1 Séries em Cossenos 51

4.3.2 Séries em Senos 53
4.4 Expansão em Meio Período 54

5 Problema de Sturm-Liouville **57**
5.1 Problemas de Valor de Contorno 57
5.2 Problemas de Autovalor 59
5.3 Equação de Sturm-Liouville 60
5.3.1 Problema de Sturm-Liouville Regular 62
5.3.2 Problema de Sturm-Liouville Periódico 62
5.3.3 Problema de Sturm-Liouville Singular 63

6 Método de Separação de Variáveis **66**
6.1 Características Gerais das EDP's 66
6.1.1 Classificação das EDP's de 2ª Ordem Lineares 68
6.2 Separação de Variáveis Aplicada à EDP Parabólicas 73
6.2.1 Resolução do Problema de Valor de Contorno 74
6.2.2 Resolução do Problema de Valor Inicial 75
6.2.3 Superposição das Soluções 76
6.2.4 Solução Particular da Equação do Calor 77
6.3 Separação de Variáveis Aplicada à EDP Elípticas 79
6.3.1 Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas 82

1 Introdução à Transformada de Laplace

Em análise matemática, uma transformada é um operador que transforma uma função de um dado domínio (por exemplo, o domínio temporal) para outro domínio. Em muitos casos, problemas que são complexos em um dado domínio podem ser facilmente resolvidos em outro domínio e, após resolvidos, pode-se trazer a solução de volta para o domínio original.

A transformada de Laplace faz parte de um grupo de transformadas chamadas de ***Transformadas Integrais***. Estas transformadas utilizam o conceito de integral para representar uma função no domínio do tempo $f(t)$ em outro domínio, normalmente chamado de *domínio de frequência*. Estas transformadas são definidas de forma geral como:

$$T[f(t)] = F(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,u)f(t)dt$$

onde u representa a variável independente no domínio da frequência e $K(t,u)$ é uma função chamada de núcleo da transformada ou ***kernel***. Da mesma forma que uma *função* relaciona um valor de entrada à um valor de saída (por exemplo, $y = x^2$ relaciona uma entrada $x = 4$ com uma saída $y = 16$), as transformadas integrais relacionam uma função de entrada em um dado domínio com uma função em outro domínio. Dependendo dos limites t_1 e t_2 e do kernel escolhido, obtém-se diferentes transformadas. As mais importantes na engenharia são as transformadas de Fourier e de Laplace.

A transformada de Fourier é obtida fazendo $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$ e $K(t,u) = e^{2\pi iut}$ e é uma ferramenta indispensável em diversas áreas, como por exemplo na análise de equações diferenciais parciais, processamento de sinais e mecânica quântica.

No momento, nosso interesse é avaliar a Transformada de Laplace, que é obtida fazendo $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$ e $K(t,u) = e^{-st}$. Por conveniência, a variável independente no domínio da frequência (neste caso também chamado de domínio de Laplace) é chamada de s. Assim, a transformada de Laplace é um operador que transforma uma função do *domínio do tempo* para do *domínio de Laplace*:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow F(s)$$

onde t e s representam a variável independente no domínio do tempo e de Laplace, respectivamente.

Este operador é definido como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

onde $f(t)$ é alguma função que possui integral definida para $t \geq 0$.

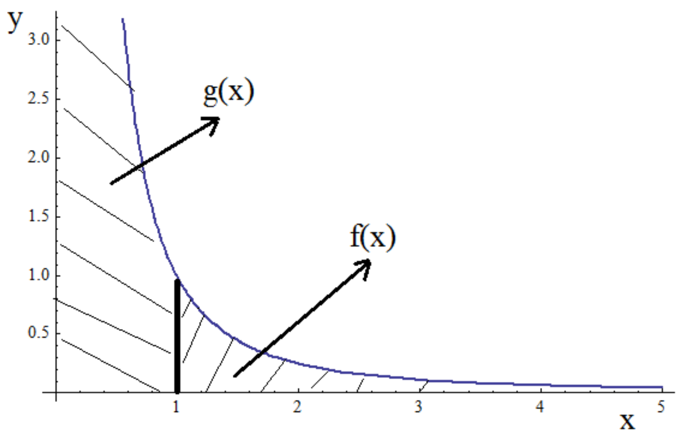
A Transformada de Laplace é particularmente útil na análise de problemas que envolvem equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, pois neste caso pode-se transformar uma equação diferencial em uma equação algébrica. Além disso, esta transformada possibilita a análise de sistemas com termos não-homogêneos expressos como funções descontínuas, sendo uma ferramenta indispensável na área de controle de processos.

Como visto anteriormente, a definição da transformada envolve uma integral imprópria. Antes de prosseguir no estudo da Transformada de Laplace, será apresentada uma breve revisão sobre integrais impróprias.

1.1 Integrais Impróprias

Integrais impróprias são integrais definidas onde pelo menos um dos limites de integração tende ao infinito (tipo 1) ou existe alguma descontinuidade infinita no intervalo de integração (tipo 2). Por exemplo, considere as seguintes integrais impróprias do tipo 1 e tipo 2, respectivamente:

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \qquad\qquad g(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$



Para a obtenção da Transformada de Laplace, só nos interessam as integrais impróprias do tipo 1, como apresentado a seguir.

1.1.1 Integrais com Intervalos Infinitos

Considere a função $f(x) = 1/x^2$ integrada desde 1 até um ponto b qualquer. A integral representa a área abaixo da curva entre estes dois pontos ($S(b)$):

$$S(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

Para nenhum valor de $b > 1$ esta área será maior que 1. Conforme o valor de t aumenta, mais a integral se aproxima de 1. Assim:

$$\lim_{b\to\infty} S(b) = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$

Desta forma, mesmo sendo avaliada em um intervalo infinito, a integral converge para um valor finito.

O mesmo procedimento pode ser usado para definir integrais impróprias com limites infinitos de forma geral como:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ou

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx$$

Estas integrais são convergentes caso os limites existam e divergentes caso os limites não existam.

Exemplo 01: Obtenha a Transformada de Laplace da função $f(t) = 1$.

Substituindo a função na definição da transformada:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt$$

Considerando que $s > 0$, esta integral pode ser avaliada como:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}dt$$

Resolvendo a integral:

$$\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}(e^{-sb} - 1)\right)$$

Neste ponto, para avaliar a integral, deve-se analisar a influência do termo s. Se $s < 0$, o termo $-sb$ será positivo e portanto no limite $b \to \infty$ a integral irá divergir (irá tender ao infinito). Assim, caso $s < 0$, a integral imprópria diverge e a transformada não existe. No entanto, se $s > 0$, o termo e^{-sb} tende a zero conforme $b \to \infty$. Assim, assumindo $s > 0$:

$$\lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{s}(e^{-sb} - 1) \right) = \frac{1}{s}$$

Dessa forma, a transformada da função $f(t) = 1$ pode ser expressa como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s} \qquad\qquad s > 0$$

Exemplo 02: Obtenha a transformada da função $f(t) = e^{at}$.

Substituindo a função na definição da transformada:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t}dt$$

Resolvendo a integral:

$$\lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^b \right) = \frac{1}{a-s}(e^{(a-s)b} - 1)$$

Novamente, caso $a - s > 0$, a integral irá divergir e portando a transformada não existe. Considerando então que $s > a$, a integral resulta em:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad\qquad s > a$$

Observe que caso $a = 0$ obtém-se a solução do exemplo anterior.

Exemplo 03: Obtenha a transformada da função $f(t) = \sin(at)$.

Utilizando a definição da transformada:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) dt$$

A integral pode ser determinada em termos do limite:

$$F(s) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt$$

Esta integral pode ser avaliada por partes, fazendo:

$$u' = e^{-st} \qquad \to \qquad u = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$v = \sin(at) \qquad \to \qquad v' = a\cos(at)$$

Substituindo na integração por partes:

$$F(s) = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}\sin(at)\Big|_0^b - \int_0^b a\cos(at)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt\right)$$

ou ainda:

$$F(s) = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}\sin(at)\Big|_0^b + \frac{a}{s}\int_0^b e^{-st}\cos(at)dt\right)$$

Pode-se avaliar os limites do primeiro termo:

$$\lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}\sin(at)\Big|_0^b\right)$$

Para que a integral acima seja convergente, é necessário que o termo e^{-sb} diminua conforme $b\to\infty$, o que ocorre desde que $s>0$. Considerando isto e também que $\sin(0)=0$, o limite acima resulta em $0-0$.

A integral na equação anterior também pode ser resolvida por partes. Assim:

$$u' = e^{-st} \qquad \to \qquad u = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$v = \cos(at) \qquad \to \qquad v' = -a\sin(at)$$

Assim:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-st}\cos(at)dt\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cos(at)\Big|_0^b - \int_0^b \frac{1}{s}e^{-st}a\sin(at)dt\right)$$

Substituindo na expressão anterior:

$$F(s) = \frac{a}{s}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cos(at)\Big|_0^b\right) - \frac{a^2}{s}\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-st}\sin(at)dt\right)$$

Pode-se observar que a integral no lado direito corresponder exatamente à definição de $F(s)$. Assim, pode-se reescrever a equação anterior como:

$$F(s) = -\frac{a}{s^2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}\cos(at)\Big|_0^b\right) - \frac{a^2}{s^2}F(s)$$

Avaliando os limites do primeiro termo (considerando $s>0$):

$$-\frac{a}{s^2}\lim_{b\to\infty} e^{-st}\cos(at)\Big|_0^b = -\frac{a}{s^2}(0-1) = \frac{a}{s^2}$$

Assim:

$$F(s) + \frac{a^2}{s^2}F(s) = \frac{a}{s^2} \qquad \to \qquad \left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)F(s) = \frac{a}{s^2}$$

o que pode ser escrito como:

$$\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right)F(s) = \frac{a}{s^2} \qquad \to \qquad F(s) = \frac{s^2}{(s^2+a^2)}\frac{a}{s^2}$$

de modo que:

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad s>0$$

1.2 Existência da Transformada

Para que a transformada de uma função $f(t)$ exista, é necessário que a integral imprópria resultante da substituição de $f(t)$ na definição da transformada seja convergente. Para isso, é necessário que a função $f(t)$ seja contínua por partes e "cresça" de uma forma mais lenta que a parte exponencial. Isto pode ser expresso como:

$$|f(t)| \leq Me^{at} \qquad\qquad \forall\, t > 0$$

onde $M > 0$ e a é algum valor real. Esta relação também pode ser expressa como:

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-at}f(t)| = 0$$

Esta condição é suficiente, mas não necessária, para que uma função contínua por partes possua possua uma transformada definida para $s > a$.

Exemplo 04: Avalie se as seguintes funções possuem transformada de Laplace.

a) $f(t) = t^2$

Avaliando o limite, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-at}t^2| = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{at}}$$

Neste caso, fica claro que o limite tanto do denominador quanto do nominador tende ao infinito. Assim, pode-se usar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{ae^{at}}$$

Novamente, tem-se uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando L'Hôpital novamente:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2t}{ae^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{a^2e^{at}}$$

Este limite tende a zero desde que $a > 0$, portanto, a transformada da função t^2 existe para $s > 0$.

b) $f(t) = e^{t^2}$

Avaliando o limite, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-at}e^{t^2}| = \lim_{t\to\infty} e^{t^2-at}$$

Avaliando o limite do expoente:

$$\lim_{t\to\infty} t^2 - at = \lim_{t\to\infty} t^2\left(1 - \frac{a}{t}\right) = \infty$$

Como consequência, $\lim_{t\to\infty} |e^{-at}e^{t^2}| = \infty$ e portanto a transformada não existe.

1.3 Linearidade da Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um operador linear. Considere duas funções $f(t)$ e $g(t)$ que possuem transformada e duas constantes c_1 e c_2, a linearidade do operador implica que:

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Esta propriedade é uma consequência direta do fato de que a integração é um operador linear. No entanto, é uma propriedade essencial para a resolução de problemas mais complexos.

Exemplo 05: Obtenha a transformada da função $f(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$ e utilize o resultado para obter a transformada das funções $\sinh(at)$ e $\cosh(at)$.

Do exemplo anterior, temos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Assim:

$$\mathcal{L}\{c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}\} = c_1 \mathcal{L}\{e^{at}\} + c_2 \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{c_1}{s-a} + \frac{c_2}{s+a}$$

Considerando que $\sinh(at) = (e^{at} - e^{-at})/2$, pode-se obter esta função fazendo-se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = -1/2$. Assim:

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a)-(s-a)}{(s+a)(s-a)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{s^2-a^2}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

Da mesma forma, $\cosh(at) = (e^{at} + e^{-at})/2$ pode ser obtido fazendo-se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 1/2$:

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a)+(s-a)}{(s+a)(s-a)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-a^2}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

1.4 Deslocamento na Frequência

A definição da transformada de Laplace da função $f(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Considere o caso onde deseja-se obter a transformada de uma função $g(t) = e^{bt} f(t)$:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{bt} f(t)) dt = \int_0^\infty e^{-(s-b)t} f(t) dt$$

Fazendo $s - b = \sigma$, temos que:

$$\int_0^{\infty} e^{-(\sigma)t} f(t)dt = F(\sigma) = F(s-b)$$

Assim:

$$\mathcal{L}\{e^{bt} f(t)\} = F(s-b)$$

Exemplo 06: Obtenha a transformada da função $f(t) = e^{-2t}\cos(3t)$

A transformada da função $g(t) = \cos(3t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = G(s) = \frac{s}{s^2 + 3^2}$$

Usando o princípio do deslocamento de frequência, a transformada da função $f(t)$ será:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)\} = G(s+2) = \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 3^2} = F(s)$$

Notas Sobre Expansão em Frações Parciais

A expansão em frações parciais é empregada para simplificar a razão entre polinômios como a soma de termos com denominadores mais simples:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$$

Um polinômio $g(x)$ pode ser escrito como a multiplicação dos termos (x - raízes). Por exemplo:

$$x^2 - 3x - 40 = (x+5)(x-8)$$

Exemplo: Raízes distintas:

$$\frac{x+3}{x^2 - 3x - 40} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-8} = \frac{(x-8)A + (x+5)B}{(x+5)(x-8)}$$

Deve-se igualar os termos de mesma ordem, de onde se obtém que:

$$A + B = 1 \qquad -8A + 5B = 3 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{2}{13} \qquad B = \frac{11}{13}$$

Assim:

$$\frac{x+3}{x^2 - 3x - 40} = \frac{2/13}{x+5} + \frac{11/13}{x-8}$$

Exemplo: Raízes Repetidas: Quando o denominador possui raízes repetidas, pode-se elevar um dos termos (x-raíz) ao quadrado.

$$\frac{s+1}{s(s^2 + 4s + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + B(s(s+2)) + Cs}{s(s+2)^2}$$

$$= \frac{A(s^2+4s+4)+B(s^2+2s)+Cs}{s(s+2)^2} = \frac{(A+B)s^2+(4A+2B+C)s+4A}{s(s+2)^2}$$

de onde se obtém que:

$$A = \frac{1}{4} \qquad B = -\frac{1}{4} \qquad C = \frac{1}{2}$$

O que implica que:

$$\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{2(s+2)^2}$$

Exemplo: Raízes Complexas

- Quando o denominador possuir raízes complexas (irredutível), pode-se manter o termo que possui as raízes complexas em sua forma original. Neste caso, o nominador deixa de ser uma constante e passa a ser um polinômio com grau N-1, onde N é o grau do denominador. Por exemplo:

$$\frac{s+1}{s^2(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s^2+4s+5)}$$

O termo $Cs+D$ é empregado pois o denominador deste termo contém duas raízes. Assim:

$$\frac{s+1}{s^2(s^2+4s+5)} = \frac{s(s^2+4s+5)A+(s^2+4s+5)B+s^2(Cs+D)}{s^2(s^2+4s+5)}$$

$$= \frac{(A+C)s^3+(4A+B+D)s^2+(5A+4B)s+5B}{s^2(s^2+4s+5)}$$

De onde se obtém que:

$$B = \frac{1}{5} \qquad A = \frac{1}{25} \qquad C = -\frac{1}{25} \qquad D = -\frac{9}{25}$$

Em muitos casos, para avaliar o termo quadrático no denominador, é preciso escrever o polinômio de segundo grau $g(s)$ da forma:

$$g(s) = (s-a)^2 + b = (s^2 - 2as + a^2) + b$$

Pode-se primeiramente ajustar o termo a e depois avaliar b. Por exemplo:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + b = s^2 + 4s + 4 + b$$

Para que a equação se igual ao polinômio original, deve-se fazer $4+b=5$ de modo que $b=1$. Assim:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1$$

Exemplo: Expanda os seguintes termo em frações parciais.

$$a)\ \frac{3x+11}{x^2-x-6}$$

As raízes do denominador são:

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$$

Assim, podemos escrever o termo como:

$$\frac{3x+11}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Tirando o mínimo, temos:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(x-3)A + (x+2)B}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

Igualando com os termos de mesma ordem do nominador:

$$A + B = 3 \qquad \rightarrow \qquad A = 3 - B$$

$$-3A + 2B = 11 \qquad \rightarrow \qquad -3(3-B) + 2B = 11 \qquad \rightarrow \qquad -9 + 3B + 2B = 11$$

$$\rightarrow \qquad 5B = 20 \qquad \rightarrow \qquad B = 4 \qquad \rightarrow \qquad A = -1$$

Assim:

$$\frac{3x+11}{x^2-x-6} = \frac{-1}{x+2} + \frac{4}{x-3}$$

(b) Escreva o seguinte polinômio da forma $(x-a)^2 + b$

$$2x^2 + 6x + 8 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 + 3x + 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (x + 3/2)^2 + b = 0$$

$$\rightarrow \qquad x^2 + 2x + 9/4 + b = 0 \qquad \rightarrow \qquad 9/4 + b = 4 \qquad \rightarrow \qquad b = 4 - 9/4 = 7/4$$

Assim:

$$2x^2 + 6x + 8 = (x + 3/2)^2 + 7/4$$

1.5 Transformada de Laplace Inversa

A resolução de problemas utilizando a transformada de Laplace usualmente envolve uma etapa onde deve-se trazer a informação de volta para o domínio do tempo. Neste caso, conhecendo-se a função $F(s)$ deve-se encontrar uma função $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. A transformação inversa é representada como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

O operador integral que determina $f(t)$ com base em $F(s)$ envolve uma integração no plano complexo, sendo que usualmente a maneira mais simples de obter a transformada inversa é simplificar $F(s)$ de maneira algébrica até se obter funções cuja transformada inversa são conhecidas (tabeladas).

Exemplo 07: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{4s+10}{s^2+6s+8}$$

A relação entre os polinômios pode ser expandida usando-se o conceito de frações parciais. Determinando as raízes do denominador:

$$r_1 = \frac{-6+\sqrt{36-32}}{2} = -2 \qquad r_2 = \frac{-6-\sqrt{36-32}}{2} = -4$$

Assim, a expansão é dada como:

$$\frac{4s+10}{s^2+6s+8} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4} = \frac{(s+4)A+(s+2)B}{(s+2)(s+4)}$$

De onde se obtém que:

$$A+B=4 \qquad 4A+2B=10 \qquad \rightarrow \qquad 4A+2(4-A)=10 \qquad \rightarrow \qquad 2A=2$$

de modo que:

$$A=1 \qquad B=3$$

Assim:

$$\frac{4s+10}{s^2+6s+8} = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+4}$$

Avaliando a transformada inversa dos termos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

Com base na transformada da função exponencial, pode-se ver que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t}$$

De forma que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{-2t} + 3e^{-4t}$$

Exemplo 08: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{2s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+16}$$

Usando a linearidade da transformada, pode-se avaliar a transformada inversa de cada um dos termos separadamente. O primeiro termo pode ser avaliado como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+25}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5^2}\right\} = 2\cos(5t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+16}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4^2}\right\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\} = \frac{3}{4}\sin(4t)$$

Assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2\cos(5t) + \frac{3}{4}\sin(4t)$$

Exemplo 09: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{1}{(s-4)^3}$$

A transformada pode ser avaliada como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2!}\frac{2!}{(s-4)^{2+1}}\right\}$$

Usando o princípio do deslocamento na frequência

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2!}\frac{2!}{(s-4)^{2+1}}\right\} = \frac{1}{2!}e^{4t}t^2$$

Exemplo 10: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{1}{s^2-8s+25}$$

Avaliando as raízes do denominador, obtém-se raízes complexa $4 \pm 3i$. Uma alternativa neste caso é buscar completar o termo quadrado de forma a deixar o denominador na forma $(s-a)^2+b$.

A expansão da função quadrática é da forma $s^2 + 2as + a^2$. Assim, pode-se avaliar o denominador como:

$$(s-4)^2 = s^2 - 8s + 16$$

Para compensar o termo $a^2 = 16$, diminui-se este valor da expressão final. Assim:

$$s^2 - 8s + 25 = (s-4)^2 - 16 + 25 = (s-4)^2 + 9$$

Avaliando a transformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 8s + 25}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2 + 9}\right\}$$

Observando a semelhança com a transformada da função seno, podemos escrever a transformada como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{(s-4)^2 + 3^2}\right)\right\}$$

Onde pode-se observar a transformada da função seno deslocada por $a = 4$. Assim, a função $f(t)$ será:

$$f(t) = \frac{1}{3}e^{4t}\sin(3t)$$

Exemplo 11: Obtenha a Transformada de Laplace Inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{6}{s} + \dfrac{1}{s-8} + \dfrac{4}{s-3}$

b) $F(s) = \dfrac{s+2}{s(s^2 - s - 12)}$

c) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2s + 5}$

d) $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$

1.6 Resolução de EDO's com a Transformada de Laplace

Uma das principais utilidades da transformada de Laplace é a resolução de Problemas de Valor Inicial. Como será visto a seguir, a aplicação da transformada em uma equação diferencial resulta em uma equação algébrica no domínio de Laplace, que pode ser facilmente resolvida e a solução transportada de volta para o domínio do tempo. Esta abordagem pode ser aplicada para a resolução de PVI's de qualquer ordem, desde que sejam lineares e com coeficientes constantes. Além disso, a Transformada de Laplace é uma das melhores maneiras de avaliar problemas envolvendo *forçamentos descontínuos*, ou seja, quando o termo não-homogêneo é dado por uma função descontínua.

A ideia geral da resolução de PVI's com o uso da Transformada de Laplace é ilustrada no esquema a seguir.

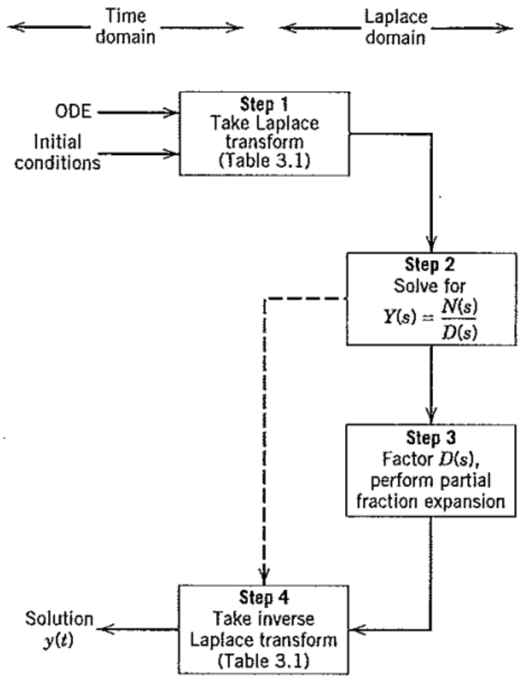


Figure 3.2 The general procedure for solving an ordinary differential equation using Laplace transforms.

A primeira etapa da resolução consiste em aplicada a transformada na equação diferencial, ou seja, deve-se avaliar a transformada do operador diferencial. De forma semelhante, pode-se também avaliar a transformada do operador integral. Por isso, a Transformada de Laplace também pode ser utilizada para a resolução de equações integro-diferenciais, que são equações diferenciais que envolvem também a integral das variáveis em algum intervalo. A seguir será apresentado como a transformada destes operadores é obtida.

1.6.1 Transformada de Derivadas e Integrais

Avaliando a transformada da derivada de uma função $f(t)$, temos que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

Resolvendo a integral por partes, podemos definir:

$$u = e^{-st} \qquad \rightarrow \qquad u' = -se^{-st} \qquad\qquad v = f(t) \qquad \rightarrow \qquad v' = f'(t)$$

De modo que:

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t)dt$$
$$= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Observe que a integral é a própria definição de $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Considerando o critério para existência da transformada, temos que o limite do primeiro termo avaliado no infinito deve ser zero. Assim:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Para avaliar derivadas de maior ordem, pode-se aplicar a própria definição anterior:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

Como a transformada da derivada primeira de $f(t)$ foi obtida anteriormente:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Pode-se continuar aplicando este conceito para avaliar a derivada de qualquer ordem:

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{d^nf}{dt^n}\Big\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}\Big|_{t=0} - \ldots - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}$$

No caso de integrais, a transformada da integral de uma função $f(t)$ avaliada entre 0 e t, é dada por:

$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(t)dt\Big\} = \int_0^\infty \Big(\int_0^t f(t)dt\Big) e^{-st}dt$$

Avaliando a integral por partes, temos que:

$$u = \int_0^t f(t)dt \qquad \rightarrow \qquad u' = f(t)$$

e

$$v' = e^{-st} \qquad \rightarrow \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

De modo que a integral pode ser avaliada como:

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^t f(t)dt\Big) e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\Big[\int_0^t f(t)dt(e^{-st})\Big]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Considerando que a função $f(t)$ satisfaz o critério para existência da transformada (taxa de crescimento menor que exponencial), o primeiro termo tende a zero conforme t tende ao infinito. A integral no segundo termo é a própria definição da transformada de $f(t)$. Assim:

$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(t)dt\Big\} = \frac{1}{s}F(s)$$

1.6.2 Resolução de Problemas de Valor Inicial

O emprego da transformada de Laplace em diferenciais retorna expressões algébricas, o que significa que equações diferenciais podem ser transformadas em equações algébricas.

Exemplo 12: Obtenha a solução do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$5\frac{dy}{dt} + 4y = 2 \qquad y(0) = 1 \qquad y(0) = 1$$

Considerando a linearidade da transformada de Laplace, pode-se avaliar cada um dos termos separadamente:

$$5\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 4\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{1\}$$

Definindo $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, temos que:

$$5(sY(s) - y(0)) + 4(Y(s)) = \frac{2}{s}$$

Considerando a condição inicial $y(0) = 1$, pode-se isolar a função $Y(s)$ como:

$$(5s+4)Y(s) = \frac{2}{s} + 5 \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{2+5s}{(s(5s+4))}$$

Par deixar todos os termos na forma $(s+a)$, pode-se dividir o numerador e o denominador por 5:

$$Y(s) = \frac{2/5 + s}{s(s+4/5)}$$

Este termo pode ser expandido em frações parciais da forma:

$$\frac{2/5+s}{s(s+4/5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4/5} = \frac{(s+4/5)A + sB}{s(s+4/5)}$$

de onde se obtém que $4/5A = 2/5$, o que implica que $A = 1/2$ e $A + B = 1$, de modo que $B = 1/2$. Assim:

$$\frac{2/5+s}{s(s+4/5)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+4/5)}$$

Como se deseja obter a função $y(t)$, aplica-se a transformada inversa em $Y(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4/5)}\right\}$$

Com isso, temos que:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4t/5}$$

Exemplo 13: Obtenha a solução do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y'(0) = 0$$

Considerando a linearidade da transformada, pode-se avaliar cada termo separadamente:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

De modo que:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 0$$

Separando os termos:

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0$$

Isolando a função $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{y'(0) + (s-1)y(0)}{s^2 - s - 2}$$

Considerando as condições iniciais conhecidas:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2}$$

Avaliando por frações parciais:

$$\frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1) + B(s-2)}{(s+1)(s-2)}$$

de onde se obtém que $A = 1/3$ e $B = 2/3$. Assim:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{1}{3(s-2)} + \frac{2}{3(s+1)}$$

Avaliando a inversa desta função, obtém-se a função $y(t)$ desejada:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

Exemplo 14: Obtenha a solução particular do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = t \qquad y(0) = 1 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y'(0) = 1$$

Avaliando a transformada de cada um dos termos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - \mathcal{L}\Big\{y\Big\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$= (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Isolando a função $Y(s)$:

$$(s^2 - 1)Y(s) = sy(0) + y'(0) + \frac{1}{s^2}$$

Considerando as condições iniciais, a expressão pode ser avaliada como:

$$Y(s) = \frac{s+1+1/s^2}{(s^2-1)} = \frac{s}{(s^2-1)} + \frac{1}{(s^2-1)} + \frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

Os dois primeiros termos podem ser facilmente identificados como a transformada das funções $\cosh(t)$ e $\sinh(t)$. O último termo pode ser avaliado através da expansão em frações parciais:

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s^2-1} = \frac{(s^2-1)A + Bs^2}{s^2(s^2-1)}$$

De onde se obtém que $A = 1$ e $A - B = 0$ de modo que $B = 1$. Assim:

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2-1}$$

Assim, temos que:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2-1)} + \frac{1}{(s^2-1)} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s^2-1)} = \frac{s}{(s^2-1)} + 2\frac{1}{(s^2-1)} + \frac{1}{s^2}$$

Avaliando a transformada inversa de cada um dos termos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \cosh(t) + 2\sinh(t) + t = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + t$$

Exemplo 15: Obtenha a solução particular do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 2y = te^{-2t} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y'(0) = -2$$

Avaliando a transformada de cada um dos termos:

$$2\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\{te^{-2t}\}$$

$$= 2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Considerando que $y(0) = 0$ e que $y'(0) = -2$:

$$2s^2Y(s) + 4 + 3sY(s) - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Juntando os termos:

$$(2s^2 + 3s - 2)Y(s) + 4 = 2\left(s^2 + \frac{3}{2}s - 1\right)Y(s) + 4\frac{1}{(s+2)^2}$$

As raízes do polinômio de 2º grau são $s_1 = -2$ e $s_2 = 1/2$, de modo que $2(s^2 + 3s/2 - 2) = 2(s+2)(s-1/2)$

Isolando a função $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{2(s+2)(s-1/2)(s+2)^2} - \frac{4}{2(s+2)(s-1/2)} = \frac{1}{2(s-1/2)(s+2)^3} - \frac{4}{2(s+2)(s-1/2)}$$

Antes de aplicar a decomposição em frações parciais, pode-se juntar os dois termos:

$$Y(s) = \frac{1-4(s+2)^2}{2(s-1/2)(s+2)^3} = \frac{1-4(s^2+4s+4)}{2(s-1/2)(s+2)^3} = \frac{-4s^2-16s-15}{2(s-1/2)(s+2)^3}$$

Este termo pode então ser avaliado como frações parciais:

$$Y(s) = \frac{-4s^2-16s-15}{(s-1/2)(s+2)^3} = \frac{A}{(2s-1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)^3}$$

Avaliando o MMC:

$$Y(s) = \frac{A(s+2)^3 + B(2s-1)(s+2)^2 + C(2s-1)(s+2) + D(2s-1)}{(2s-1)(s+2)^3}$$

Fazendo a expansão e juntando os termos de mesma ordem:

$$Y(s) = (A+2B)s^3 + (6A+7B+2C)s^2 + (12A+4B+3C+2D)s + (8A-4B-2C-D)$$

Igualando os termos de mesma ordem, obtém-se 4 equações:

$$A + 2B = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = -A/2$$

$$6A + 7B + 2C = -4 \qquad \rightarrow \qquad 6A - \frac{7}{2}A + 2C = -4 \qquad \rightarrow \qquad C = -\frac{5}{4}A - 2$$

$$12A + 4B + 3C + 2D = -16 \qquad \rightarrow \qquad 12A - 2A + 3\left(-\frac{5}{4}A - 2\right) + 2D = -16$$

$$10A - \frac{15A}{4} - 6 + 2D = -16 \qquad \rightarrow \qquad \frac{25A}{4} + 2D = -10 \qquad \rightarrow \qquad D = -\frac{25}{8}A - 5$$

$$8A - 4B - 2C - D = -15 \qquad \rightarrow \qquad 8A + 2A - 2\left(-\frac{5}{4}A - 2\right) + \frac{25A}{8} + 5 = -15$$

$$10A + \frac{5}{2}A + \frac{25}{8}A = -24 \qquad \rightarrow \qquad \frac{125A}{8} = -24 \qquad \rightarrow \qquad A = -\frac{192}{125}$$

Com isso, pode-se determinar as demais constantes:

$$B = \frac{96}{125} \qquad C = -\frac{2}{25} \qquad D = -\frac{1}{5}$$

Assim, temo que:

$$Y(s) = -\frac{192}{125(2(s-1/2))} + \frac{96}{125(s+2)} - \frac{2}{25(s+2)^2} - \frac{1}{5(s+2)^3}$$

O que também pode se escrito como:

$$Y(s) = \frac{1}{125}\left(-\frac{96}{(s-1/2)} + \frac{96}{(s+2)} - \frac{10}{(s+2)^2} - \frac{25}{(s+2)^3}\right)$$

Agora, a transformada inversa de cada termo pode ser determinada:

$$y(t) = \frac{1}{125}\left(-96e^{-t/2} + 96e^{2t} - 10te^{-2t} - \frac{25}{2}t^2e^{-2t}\right)$$

Exemplo 16: Obtenha a solução dos seguintes PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$a)\ \frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} \qquad\qquad y(0) = 0$$

$$b)\ y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 0 \qquad\qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1$$

$$c)\ y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 3$$

$$d)\ y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t} \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$e) y'(t) + y/2 = 17\sin(2t) \qquad\qquad y(0) = -1$$

Lista de Exercícios 01 - Introdução à Transformada de Laplace

01) Demonstre a obtenção da transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) = 1 - 2e^{-2t}$

b) $f(t) = t$

c) $f(t) = t^2 + t$

2) Faça a expansão em frações parciais para os seguintes termos. Quando o denominador possuir raízes complexas, escreva os polinômios de segundo grau da forma $(x - a)^2 + b$.

a) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 3x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7x + 12}{(x+1)(x^2 + 2x + 5)}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x^3 - x)}$

d) $f(x) = \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

3) Obtenha a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{20}{(s-1)(s+4)}$

R: $f(t) = 4e^{-4t}(-1 + e^{5t})$

b) $F(s) = \dfrac{2s+16}{s^2 - 16}$

R: $f(t) = e^{-4t} + 3e^{4t}$

c) $F(s) = \dfrac{10}{2s + \sqrt{2}}$

R: $f(t) = 5e^{-t/\sqrt{2}}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)} \qquad a \neq b$

R: $f(t) = e^{-at}/(b-a) + e^{-bt}/(a-b)$

e) $F(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)} \qquad a = b$

R: $f(t) = te^{-at}$

f) $F(s) = \dfrac{2s+5}{s^2 - 25}$

R: $f(t) = (1/2)e^{-5t}(1 + 3e^{10t})$

g) $F(s) = \dfrac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$

R: $f(t) = e^{-4t}(6 - 6e^{t} + e^{2t})$

h) $F(s) = \dfrac{s+4}{(s+1)^2}$

R: $f(t) = e^{-t}(1 + 3t)$

i) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 1}$

R: $f(t) = (2/\sqrt{3})e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$

4) Resolva os seguintes Problemas de Valor Inicial utilizando a transformada de Laplace:

a) $\dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t} \qquad y(0) = 5$

R: $y(t) = (t+5)e^{-t}$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - 3y = 6e^{t} \qquad y(0) = 1 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 3$

R: $y(t) = -3/2e^{t} + 3/4e^{-t} + 7/4e^{3t}$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 3$

R: $y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

d) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 6\dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} + 6y = 1 \qquad \left.\dfrac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y(0) = 0$

R: $y(t) = 1/6 - 1/2e^{-t} + 1/2e^{-2t} - 1/6e^{-3t}$

e) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \qquad y(0) = 2$

R: $y(t) = 2e^{-3t}$

f) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$

R: $y(t) = 2e^{2t} - 3te^{2t}$

g) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} \qquad y(0) = -5$

R: $y(t) = e^{3t} - 6e^{2t}$

h) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0 \qquad y(0) = -1 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 7$

R: $y(t) = e^t(4\sin(2t) - \cos(2t))$

i) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

R: $y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}$

5) ***Resolução de sistemas de EDO's:*** Da mesma forma que a aplicação da Transformada de Laplace em uma EDO linear com coeficientes constantes transforma a equação em uma relação algébrica, pode-se aplicar a transformada em um sistema de EDO's para se obter um sistema algébrico, que pode então ser resolvido. Considere o seguinte sistema de PVI's:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y \qquad x(0) = 8$$
$$\frac{dy}{dt} = y - 2x \qquad y(0) = 3$$

a) Aplique a Transformada de Laplace neste sistema e resolva o sistema algébrico resultante para obter expressões para $X(s)$ e $Y(s)$;

b) Obtenha a solução do sistema de equações diferenciais;

R: $x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$ $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$

2 EDO's com Forçamentos Descontínuos

2.1 Função Degrau e Deslocamento no Tempo

Uma das principais vantagens da utilização da transformada de Laplace na modelagem de processos é a facilidade em operar com funções descontínuas. Como a transformada é definida em termos de uma integral, é possível expressar a transformada de Laplace de uma função $g(t)$ que contém uma descontinuidade em $t = a$ como:

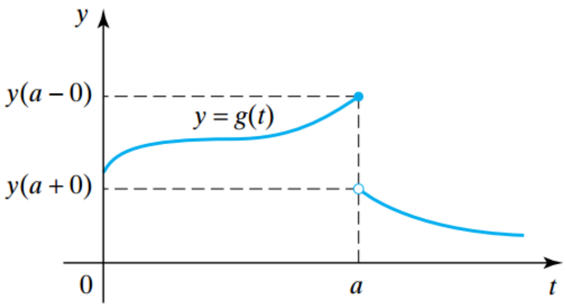


FIGURE 7.1 A discontinuous function $g(t)$.

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{a-\epsilon} e^{-st} g(t) dt + \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

Dentre as funções descontínuas mais importantes nas engenharias, pode-se destacar a função degrau ou função de Heaviside. Esta função é definida como:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

Esta função funciona como um "interruptor" (liga/desliga). Pode-se usar funções degrau também para descrever funções que possuem valores 0 ou 1 em intervalos finitos, conforme apresentado no gráfico a seguir:

Esta função pode ser modelada como:

$$y(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$$

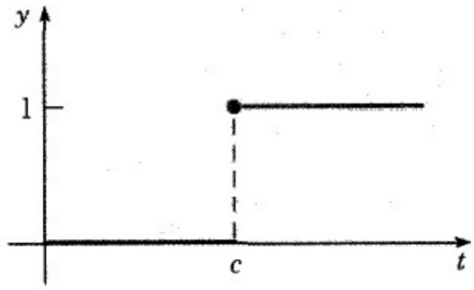


FIG. 6.3.1 Gráfico de $y = u_c(t)$.

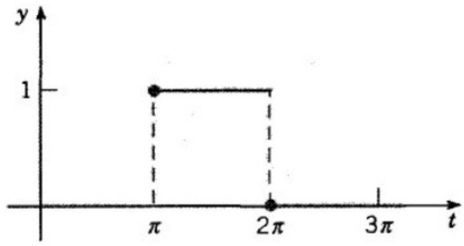
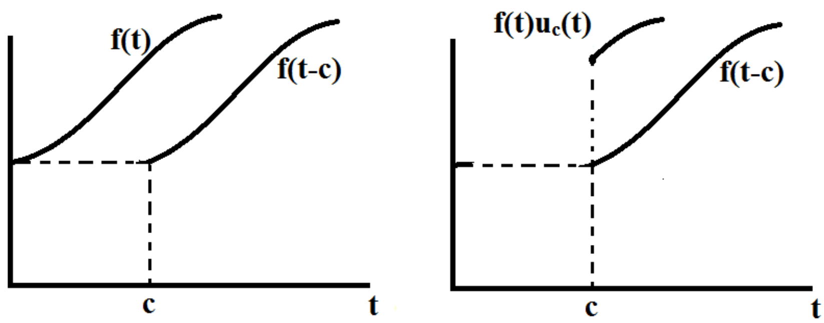


FIG. 6.3.3 Gráfico de $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

Pode-se empregar este tipo de função para "ativar" uma determinada função $f(t)$ somente dentro de um intervalo específico.

2.1.1 Deslocamento no Tempo

Em muitos processos físicos, a função que descreve as variáveis pode ser deslocada no tempo, conforme apresentado no gráfico a seguir. Neste caso, não ocorre uma ativação/desativação da função, mas sim um deslocamento de toda a função. Considerando que a função $f(t)$ definida em um intervalo $[0, \infty)$ seja deslocada por um valor c, a função deslocada corresponde a $f(t-c)$.



Como a funcão $f(t)$ era definida a partir de zero, a função $f(t-c)$ vai ser definida a partir de $t = c$. No entanto, em muitas aplicações que envolvem integral, como por exemplo para determinar a Transformada de Laplace, deve-se conhecer a função a partir de $t = 0$. Para contornar este problema, pode-se supor que a função $f(t-c)$ seja igual a zero no intervalo de $t=0$ até $t=c$, de modo que a área embaixo da curva (integral) seja nula.

Assim, considerando que a função $f(t-c)$ deve igual a zero para $t<c$, pode-se usar a função degrau ativar a função somente em $t=c$. Pode-se representar a curva deslocada $\widetilde{f}(t)$ válida no intervalo $[0,\infty)$ como:

$$\widetilde{f}(t) = u_c(t)f(t-c)$$

Avaliando a transformada de Laplace desta função, temos que:

$$\mathcal{L}\{\widetilde{f}(t)\} = \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$

Para valores de $t<c$, a função vale zero, de modo que a integral (área abaixo da curva) pode ser avaliada a partir de $t=c$:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_c^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$

Neste caso, a função $u_c(t)$ será igual a 1 em todo o intervalo de integração. Para resolver a integral, pode-se realizar a seguinte mudança de variáveis:

$$x = t - c \qquad \rightarrow \qquad dx = dt$$

Quando $t=c$, $x=0$, de modo que a integral pode ser avaliada como:

$$\int_{t=c}^{t=\infty} e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-s(x+c)}f(x)dx$$

ou ainda:

$$= \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-sx}e^{-sc}f(x)dx = e^{-sc}\int_{x=0}^{x=\infty} e^{-sx}f(x)dx$$

A integral corresponde exatamente à definição da transformada da função não-deslocada $f(t)$, de modo que:

$$\mathcal{L}\{\widetilde{f}(t)\} = e^{-sc}F(s)$$

Considerando a mudança de variável empregada:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-sc}F(s)$$

Este procedimento é conhecido como deslocamento no tempo.

Resumo:

- Deslocamento na frequência:

$$\mathcal{L}\{e^{bt}f(t)\} = F(s-b)$$

- Deslocamento no tempo:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-sc}F(s)$$

Exemplo 01: Obtenha a transformada de Laplace da seguinte função:

$$f(t) = u_\pi(t)\sin(t-\pi)$$

Considerando o princípio de deslocamento no tempo, a transformada desta função será igual a:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(t)\} = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Exemplo 02: Encontre a transformada inversa da seguinte função:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-3s}}{(s+2)^2}$$

Considerando a linearidade da transformada, cada um dos termos pode ser avaliado separadamente. Com a exceção da parte exponencial, o primeiro e o segundo termo correspondem à transformada da função $(1/\pi)\sin(\pi t)$. Usando o princípio do deslocamento no tempo, o primeiro termo é avaliado como:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{e^{-s}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\Big\} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_1(t)$$

Da mesma forma, o segundo termo é avaliado com:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{e^{-2s}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\Big\} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_2(t)$$

Desconsiderando a parte exponencial, o terceiro termo pode ser avaliado como:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+2)^2}\Big\}$$

Este termo pode ser avaliado como a transformada de $f(t) = t$ com um deslocamento na frequência de -2. Então, temos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+2)^2}\Big\} = te^{-2t}$$

Considerando agora o princípio do deslocamento no tempo, o terceiro termo completo resulta em:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-st}}{(s+2)^2}\Big\} = u_3(t)(t-3)e^{-2(t-3)}$$

Assim, a transformada inversa da função $F(s)$ será:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_1(t) + \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_2(t) + u_3(t)(t-3)e^{-2(t-3)}$$

Exemplo 03: Encontre a transformada inversa da seguinte função:

$$G(s) = \frac{s - e^{-2s}}{s^2 + 2s + 5}$$

2.2 Função Delta de Dirac

Outro exemplo de função descontínua muito utilizada na modelagem de fenômenos físicos é a função delta de Dirac, também chamada de função impulso. Esta função é empregada para descrever forças de módulo grande que agem por pequenos intervalos de tempo.

Considere uma equação da forma:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t)$$

onde $g(t)$ representa uma força aplicada em um intervalo $c - \tau < t < c + \tau$ e é zero para os demais valores de t.

A integral $I(t)$, definida como:

$$I(t) = \int_{c-\tau}^{c+\tau} g(t)dt$$

representa o impulso causado pela força dentro do intervalo $(c - \tau, c + \tau)$. Como a função é nula fora deste intervalo, a integral pode também ser avaliada como:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$$

Em particular, considere $g(t)$ definida como:

$$g(t) = d_\tau(t-c) = \begin{cases} 1/2\tau & c - \tau < t < c + \tau \\ 0 & t \leq c - \tau \text{ ou } t \geq c + \tau \end{cases}$$

A integral resulta em:

$$I(t) = \int_{c-\tau}^{c+\tau} (1/2\tau)dt = \frac{1}{2\tau}(c + \tau - (c - \tau)) = 1$$

Avaliando o limite $\tau \to 0$

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

A função delta de Dirac ($\delta(t)$) é obtida avaliando a integral no limite $\tau \to 0$, sendo que, por definição, neste caso $I(t) = 1$. Dessa forma, $\delta(t)$ é definida como:

$$\delta(t-c) = 0 \qquad t \neq c$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c)dt = 1$$

Nenhuma função comum satisfaz estas condições, sendo por isso definida a função delta de Dirac. Fisicamente, esta função representa um impulso aplicado em $t = c$.

Para avaliar a transformada de Laplace da função $\delta(t-c)$, podemos considerar que:

$$\delta(t-c) = \lim_{\tau\to 0} d_\tau(t-c)$$

De modo que:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\} = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-c)\}$$

Como $d_\tau(t-c)$ é diferente de zero apenas no intervalo $c-\tau$ até $c+\tau$, temos que:

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t-c)dt = \int_{c-\tau}^{c+\tau} e^{-st} d_\tau(t-c)dt$$

Substituindo a definição de $d_\tau(t-c)$:

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-c)\} = \frac{1}{2\tau}\int_{c-\tau}^{c+\tau} e^{-st}dt = -\frac{1}{2s\tau} e^{-st}\Big|_{t=c-\tau}^{t=c+\tau} = \frac{1}{2s\tau} e^{-sc}(e^{s\tau} - e^{-s\tau})$$

O resultado acima pode também ser expresso como:

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-c)\} = \frac{\sinh(s\tau)}{s\tau} e^{-sc}$$

De modo que:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\} = \lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-sc}\right\}$$

O limite gera uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando L'Hôpital:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\} = \lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{s\cosh s\tau}{s} e^{-sc}\right\} = e^{-sc}$$

Esta equação define a transformada para $\delta(t-c)$ para qualquer valor de $t_0 > 0$. Avaliando o limite quando $t \to c$, temos:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{c\to 0} e^{-sc} = 1$$

Em muitos casos, a função Delta de Dirac aparece multiplicada por outra função que define a natureza do impulso. Como $\delta(t-c)$ é diferente de zero somente em algum valor de $t=c$, o produto $f(t)\delta(t-c)$ representa um impulso de intensidade $f(c)$ em $t=c$.

A transformada do produto $f(t)\delta(t-c)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\delta(t-c)dt$$

Como este termo só é diferente de zero em $t=c$, temos que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = \int_0^{\infty} e^{-sc}f(c)\delta(t-c)dt$$

Como $e^{-sc}f(c)$ representa um valor constante no domínio do tempo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = e^{-sc}f(c)\int_0^{\infty} \delta(t-c)dt$$

Como a integral de $\delta(t-c)dt$ é definida como 1:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = e^{-sc}f(c)$$

2.3 EDO's com Forçamentos Descontínuos

Em muitos casos, o termo não-homogêneo das equações diferenciais $(r(t))$ é dado por uma função descontínua, sendo neste caso a transformada de Laplace um dos métodos mais adequados para a análise do problema.

Exemplo 04: Resolva o seguinte PVI:

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+2y=r(t) \qquad r(t)=\begin{cases} 1 & 5\geq t<20 \\ 0 & \begin{cases} 0\geq t<5 \\ t\geq 20 \end{cases} \end{cases} \qquad y(0)=0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$$

A parte não-homogênea representa uma função degrau unitário entre 5 e 20 e nula para os demais valores. Em termos da função degrau, esta função pode ser expressa como:

$$r(t)=u_5(t)-u_{20}(t)$$

Conforme visto anteriormente, a transformada desta função pode ser dada como (considerando $f(t)=1$):

$$\mathcal{L}\{r(t)\}=\frac{e^{-5s}}{s}-\frac{e^{-20s}}{s}$$

Avaliando também a transformada da parte homogênea:

$$2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}$$

Usando as condições iniciais e agrupando os termos semelhantes, temos que:

$$Y(s)(2s^2 + s + 2) = \frac{e^{-5s} + e^{-20s}}{s}$$

De modo que:

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} + e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)} = H(s)e^{-5s} + H(s)e^{-20s} \qquad H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}$$

Considerando que $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$ e utilizando o princípio de deslocamento no tempo, temos que:

$$y(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20)$$

Para determinar o formato da função $f(t)$, temos que avaliar a inversa de $H(s)$. Para isso, pode-se expandir a função em frações parciais:

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{2s^2 + s + 2} = \frac{(2s^2 + s + 2)A + (Bs + C)s}{s(2s^2 + s + 2)}$$

de onde se obtém que $A = 1/2$, $C = -1/2$ e $B = -1$. Assim:

$$H(s) = \frac{1}{2s} - \frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2}$$

O primeiro termo pode ser facilmente avaliado. Para analisar o segundo termo, pode-se dividir os termos por 2 e completar o quadrado no denominador:

$$\frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2} = \frac{1/2(s + 1/2)}{s^2 + s/2 + 1} = \frac{1/2(s + 1/2)}{(s + 1/4)^2 + 1 - 1/16}$$

ou ainda:

$$= \frac{1}{2}\frac{(s + 1/4) + 1/4}{(s + 1/4)^2 + 15/16} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s + 1/4)}{(s + 1/4)^2 + 15/16} + \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15/16}}{(s + 1/4)^2 + 15/16}\right)$$

O primeiro termo pode ser visto como a transformada da função cosseno e o segundo termo da função sendo deslocadas por 1/4 na frequência. Assim:

$$H(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\left(\frac{(s + 1/4)}{(s + 1/4)^2 + 15/16} + \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15/16}}{(s + 1/4)^2 + 15/16}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{15}}e^{-t/4}\sin\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right)\right)$$

Exemplo 05: Encontre a solução do Problema de Valor Inicial:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-4) \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação:

$$2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-4s}$$

Usando as condições iniciais e agrupando os termos:

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = e^{-4s} \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{e^{-4s}}{2s^2 + s + 2}$$

Dividindo o numerador e o denominador por 2:

$$Y(s) = \frac{e^{-4s}}{2}\frac{1}{s^2 + s/2 + 1}$$

Completando o quadrado no denominador, temos:

$$Y(s) = \frac{e^{-4s}}{2}\frac{1}{(s+1/4)^2 + 15/16} = \frac{e^{-4s}}{2}\frac{4}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15}/4}{((s+1/4)^2 + 15/16)}$$

Considerando que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{15}/4}{(s+1/4)^2 + 15/16}\right\} = h(t) = \sin(\sqrt{15}t/4)e^{-t/4}$$

A função exponencial no domínio de Laplace, resulta em um deslocamento no tempo. Assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}u_4(t)h(t-4)$$

ou ainda:

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}u_4(t)e^{-(t-4)/4}\sin(\sqrt{15}(t-4)/4)$$

Considerando as propriedades da função degrau, este resultado pode ser expresso como:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}}e^{-(t-4)/4}\sin\left(\dfrac{\sqrt{15}(t-4)}{4}\right) & t \geq 4 \end{cases}$$

Exemplo 06) Obtenha a solução dos seguintes PVI's

a) $\dfrac{dy}{dt} + y = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \qquad y(0) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dt} + y = \delta(t-1) + t \qquad y(0) = 1$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = u_{3\pi}(t) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

2.4 Convolução

Devido à linearidade da transformada de Laplace, sabe-se que $\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \{g(t)\}$. No caso da multiplicação de duas funções $f(t)$ e $g(t)$, no entanto, não ocorre a mesma relação. Assim:

$$\mathcal{L}\{(f(t)g(t))\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

O produto da transformada de duas funções é, na verdade, igual à transformada da convolução destas duas funções:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{(f*g)(t)\}$$

A convolução entre as funções $f(t)$ e $g(t)$ é definida como:

$$h(t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Teorema: Se duas funções $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$, então:

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

onde

$$h(t) = (f*g)(t) = \int_0^\tau f(t-\tau)g(\tau)$$

Exemplo 06: Usando a propriedade da convolução, encontre a transformada inversa de:

$$H(s) = \frac{1}{(s-a)s}$$

Fazendo:

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)} \qquad G(s) = \frac{1}{s}$$

temos que $H(s) = F(s)G(s)$. As transformadas inversas de $F(s)$ e $G(s)$ são facilmente obtidas:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at} \qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 1$$

Definindo $f(\tau) = e^{a\tau}$ e $g(t-\tau) = 1$ e considerando a propriedade da convolução:

$$h(t) = (f*g)(t) = e^{at}*1 = \int_0^t e^{a\tau}\cdot 1 d\tau = \frac{1}{a}e^{a\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{a}(e^{at}-1)$$

Assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{a}(e^{at}-1)$$

2.4.1 Propriedades da Convolução

A convolução mantém muitas das propriedades da multiplicação normal. Por exemplo:

- Comutatividade: $f * g = g * f$

- Distributividade: $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

- Associatividade: $(f * g) * h = f * (g * h)$

No entanto, algumas propriedades não são mantidas. Por exemplo, $f * 1 \neq f$:

$$f * 1 = \int_0^t f(t-\tau) \cdot 1 d\tau = \int_0^t f(t-\tau) d\tau$$

Por exemplo, fazendo $f(t) = \cos(t)$:

$$f * 1 = \cos(t) * 1 = \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau$$

A integral pode ser facilmente resolvida através de uma mudança de variável $t - \tau = u$:

$$\int_0^t \cos(t-\tau) d\tau = -\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = -\sin(0) + \sin(t) = \sin(t)$$

Exemplo 07: Encontre a transformada inversa de:

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

A função $H(s)$ pode ser escrita como:

$$H(s) = F(s)G(s) \qquad F(s) = \frac{1}{s^2} \qquad G(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

onde as transformadas inversas de $F(s)$ e $G(s)$ são conhecidas:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = t \qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \sin(at)$$

Para avaliar $h(t)$, usa-se a propriedade da convolução:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t (t-\tau)\sin(a\tau) d\tau = \int_0^t t\sin(a\tau) d\tau - \int_0^t \tau \sin(a\tau) d\tau$$

Considerando que:

$$\int_0^t t\sin(a\tau) d\tau = -\frac{t}{a}\cos(a\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = -\frac{t}{a}(\cos(at) - 1)$$

A integral do segundo termo pode ser avaliada por partes, definindo:

$$u = \tau \qquad \rightarrow \qquad u' = \tau' = 1 \qquad v' = \sin(a\tau) \qquad \rightarrow \qquad v = -\frac{\cos(a\tau)}{a}$$

de modo que:

$$\int_0^t \tau\sin(a\tau)d\tau = -\frac{\tau\cos(a\tau)}{a}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \frac{\cos(a\tau)}{a}d\tau$$

$$= -\left(\frac{t\cos(at)}{a}\right) + \frac{\sin(a\tau)}{a^2}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \left(\frac{t\cos(at)}{a}\right) + \left(\frac{\sin(at)}{a^2}\right)$$

Juntando os termos:

$$h(t) = -\frac{t\cos(at)}{a} + \frac{t}{a} + \left(\frac{t\cos(at)}{a}\right) - \left(\frac{\sin(at)}{a^2}\right) = \frac{t}{a} - \left(\frac{\sin(at)}{a^2}\right)$$

Exemplo 08: Encontre a solução do PVI:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = g(t) \qquad y(0) = 3 \qquad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = -1$$

onde $g(t)$ é uma função qualquer.

Avaliando a transformada da equação diferencial, temos:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = G(S)$$

Empregando as condições iniciais e isolando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{3s - 1 + G(s)}{s^2+4} = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s)$$

Avaliando a inversa de cada um dos termos:

$$y(t) = 3\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}G(s)\right\}$$

Para avaliar a inversa do último termo, pode-se empregar o conceito de convolução:

$$y(t) = 3\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Lista de Exercícios 02 - EDO's com Forçamentos Descontínuos

1) Obtenha a solução dos seguintes PVI's com forçamento descontínuo:

a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

R: $y(t) = (1 - 2t + t^2)u_1(t)/2$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi/2 \\ 0 & t \geq \pi/2 \end{cases} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$

R: $y(t) = 1 - \cos(t) + \sin(t) - u_{\pi/2}(1 - \cos(t - \pi/2))$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} + 5\delta(t-2) \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$

R: $y(t) = e^{-t}\sin(t) + e^{-t}(1 - \cos(t)) + 5u_2(t)e^{-(t-2)}\sin(t-2)$

d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = \delta(t - \pi/2) + u_\pi \cos(t) \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

R: $y(t) = u_{\pi/2}(e^{-2t+\pi} - e^{-3t+3\pi/2}) - (u_\pi(t)/10)(-4e^{-2t+2\pi} + 3e^{-3t+3\pi} - \cos(t) - \sin(t))$

2) Considerando os princípios de deslocamento no tempo e na frequência, obtenha a transformada inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s^2}$

R: $f(t) = u_4(t)(t-4)$

b) $F(s) = \dfrac{se^{-s}}{s^2 + a^2}$

R: $f(t) = u_1(t)\cos(a(t-1))$

c) $F(s) = s^{-2} - (s^{-2} + s^{-1})e^{-s}$

R: $f(t) = t - tu_1(t)$

d) $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$

R: $f(t) = e^{-(t-\pi)\sin(t-\pi)u_\pi(t)}$

e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 4}$

R: $f(t) = te^{-2t}$

f) $F(s) = \dfrac{1 - e^{-2s}}{s^2}$

R: $f(t) = t - (t-2)u_2(t)$

3) Use o conceito de convolução para obter a transformada inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$

b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-2)}$

c) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2 + 16)^2}$

d) $F(s) = \dfrac{5}{(s^2+1)(s^2+25)}$

3 Transformada de Laplace Aplicada à EDP's

A transformada de Laplace também é uma ferramenta útil na resolução de equações diferenciais parciais, em particular quando estas possuírem somente duas variáveis independentes. Assim como a aplicação da transformada em uma EDO linear com coeficientes constantes transforma a equação diferencial em uma equação algébrica, a aplicação em uma EDP com duas variáveis independentes transforma a EDP em uma EDO, que pode então ser resolvida analiticamente. A solução da EDO será termos da variável do domínio de Laplace e de uma das variáveis independentes originais, porém aplicando a transformada inversa pode-se obter a solução da EPD no domínio original.

Para entender a aplicação da Transformada de Laplace em EDP's, pode-se primeiramente avaliar a transformada de um função de duas variáveis $u(x,t)$. Por analogia, esta transformada será chamada de $U(x,s)$, sendo definida como:

$$\mathcal{L}(u(x,t)) = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)dt$$

Como a integração é realizada em termos da variável t, a variável x é tratada como constate. Por exemplo, considere a seguinte função:

$$u(x,t) = x + e^{xt} + \sin(2xt)$$

A transformada de Laplace desta função será:

$$U(x,s) = \mathcal{L}(u(x,t)) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s-x} + \frac{2x}{s^2+4x^2}$$

De forma semelhante, pode-se avaliar a transformada da derivada de $u(x,t)$ em função de t:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

Resolvendo a integral por partes:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = e^{-st}u(x,t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt$$

Considerando novamente que o limite de $t \to \infty$ do produto $e^{-st}u(x,t)$ tende a zero, a relação anterior pode ser expressa como:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = sU(x,s) - u(x,0)$$

Da mesma forma, a transformada da derivada segunda será:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = s^2U(x,s) - su(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$$

Além da derivada parcial em função de t, a EDP também irá envolver alguma derivada em função de x. A transformada de Laplace da derivada primeira de $u(x,t)$ em relação a x é dada por:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}dt$$

Utilizando a regra de Leibniz, a integral anterior pode ser escrita como:

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}dt = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt$$

Assim:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{dU(x,s)}{dx}$$

Utilizando a mesma relação, a transformada da derivada segunda é dada por:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$$

Com isso, pode-se transformar uma EDP envolvendo duas variáveis independentes x e t em uma EDO contendo somente a variável independente x.

Exemplo 01: Considere a seguinte EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -u, \qquad x > 0, \qquad t > 0$$

e as seguintes condições inicial e de contorno:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = \sin(x)$$

Obtenha a solução para este problema utilizando a Transformada de Laplace.

Aplicando a Transformada de Laplace na EDP, a equação pode ser escrita como:

$$\frac{dU(x,s)}{dx} + sU(x,s) - u(x,0) + U(x,s) = 0$$

Utilizando a condição inicial especificada e omitindo o argumento da função $U(x,s)$:

$$\frac{dU}{dx} + (s+1)U = \sin(x)$$

Como esta é uma EDO de primeira ordem linear, pode ser resolvida utilizando o método do fator integrante. Neste caso, o fator integrante será:

$$\mu(x) = e^{\int (s+1)dx} = e^{(s+1)x}$$

Multiplicando a EDO pelo fator:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(s+1)x}U\right) = e^{(s+1)x}\sin(x)$$

Integrando ambos os lados em relação a x, obtém-se:

$$e^{(s+1)x}U(x,s) + C = \int e^{(s+1)x}\sin(x)dx$$

A integral acima pode ser resolvida por partes, onde obtém-se que:

$$\int e^{(s+1)x}\sin(x)dx = \frac{e^{(s+1)x}(-\cos(x) + (1+s)\sin(x))}{s^2+2s+2} + C$$

Substituindo na expressão anterior e juntando as constantes de integração:

$$U(x,s) = \frac{(s+1)\sin(x) - \cos(x)}{s^2+2s+2} + Ce^{-(s+1)x}$$

Para determinar a constante de integração C, pode-se utilizar a condição de contorno especificada $u(0,t) = 0$. Da definição da transformada de $u(x,t)$, temos que:

$$\mathcal{L}(u(x,t)) = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt$$

Isto implica que:

$$U(0,s) = \int_0^\infty e^{-st}u(0,t)dt$$

logo, se $u(0,t) = 0$, como consequência a integral acima será nula e $U(0,s) = 0$. Assim, a constante C pode ser avaliada como:

$$U(0,s) = 0 = \frac{(s+1)\sin(0) - \cos(0)}{s^2+2s+2} + Ce^{-(s+1)0} \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

Com isso, $U(x,s)$ é dada por:

$$U(x,s) = \frac{(s+1)\sin(x) - \cos(x) + e^{-(s+1)x}}{s^2+2s+2}$$

Avaliando a transformada inversa da função anterior, obtém-se a solução para a EDP com as condições especificadas:

$$u(x,t) = e^{-t}\cos(t)(\sin(x) - \sin(t) + u_x \sin(t-x))$$

Exemplo 02: Considere a seguinte EDP:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \qquad t \geq 0$$

e as seguintes condições inicial e de contorno:

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = t$$

Obtenha a solução para este problema utilizando a Transformada de Laplace.

Exemplo 03: Considere a equação do calor (unidimensional), expressa como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad x > 0, \qquad t > 0$$

com uma das extremidades ($x = 0$) mantidas a $u = 1$, de modo que

$$u(0,t) = 1$$

e possuindo a seguinte condição inicial:

$$u(x,0) = 0$$

Além disso, considere que a equação é resolvida em um meio semi-infinito e que a temperatura em uma distância suficientemente grande da origem ($x = 0$) permanece igual à condição inicial, ou seja:

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$$

Obtenha a solução para este problema utilizando a Transformada de Laplace.

Lista de Exercícios 03 - Aplicação da Transformada de Laplace em EDP's

01) Resolva a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 1$$

no domínio $x \geq 0$, $t \geq 0$ sujeita à condição inicial $u(x,0) = 0$ e à condição de contorno $u(0,t) = 0$.

R: $u(x,t) = t - u_x(t-x)$

02) Considere a equação do calor, expressa como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 2, \qquad t > 0$$

com as duas extremidades mantidas a $u = 0$, de modo que

$$u(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0$$

e possuindo a seguinte condição inicial:

$$u(x,0) = 3\sin(2\pi x)$$

Obtenha a solução para este problema utilizando a Transformada de Laplace.

R: $u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t}) \sin(2\pi x)$

03) Utilizando a Transformada de Laplace, obtenha a solução para a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad x > 0$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$u(x,0) = 0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = 0$$

$$u(0,t) = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} u(x,t) = 0$$

Obtenha a solução para este problema utilizando a Transformada de Laplace.

R: $u(x,t) = u_{x/c}(t)$

4 Séries de Fourier

As séries de Fourier são utilizadas para representar funções em termos de um somatório de funções mais simples, neste caso senos e cossenos. A utilização das séries de Fourier é similar às séries de Taylor, onde uma dada função pode ser representada em termos uma série de potências. Devido ao comportamento periódico das funções seno e cosseno, a representação de uma função em termos de séries de Fourier resulta em uma função periódica. Por isso, as séries de Fourier são muito utilizadas para a resolução de problemas de valor de contorno (PVC) e equações diferenciais parciais (EDP), onde existe um domínio de solução finito em relação à alguma das variáveis independentes.

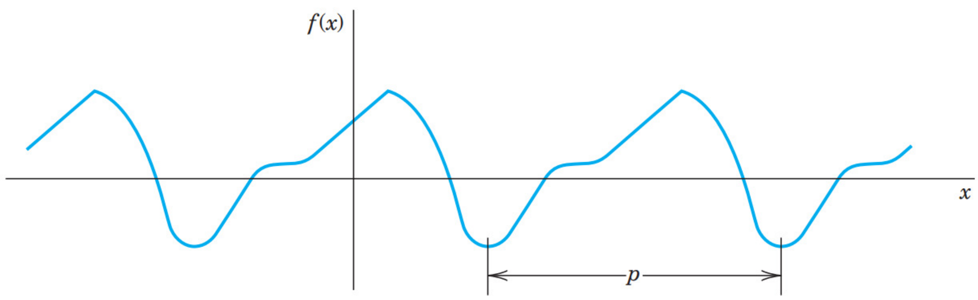
Uma função $f(x)$ é dita periódica se existe algum valor positivo p, chamado de período da função, tal que:

$$f(x+p) = f(x)$$

Isto também implica que:

$$f(x+np) = f(x)$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Eventualmente a função $f(x)$ pode não ser definida em alguns pontos específicos. Por exemplo, a função $f(x) = \tan(x)$ não é definida em $x = \pm, \pi/2$, $x = \pm 3\pi/2$, ... Ainda assim, trata-se de uma função periódica. Um exemplo de função periódica é apresentado na figura a seguir.



Função periódica com período p

4.1 Funções com período 2π

Antes de analisar o caso geral para uma função com período p qualquer, considere o caso simplificado onde a função $f(x)$ possui período 2π. Neste caso, a expansão da função em séries de Fourier pode ser expressa por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

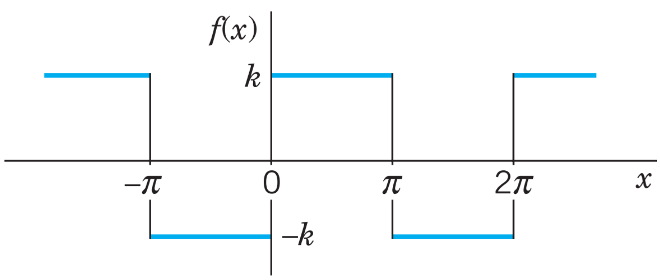
desde que seja possível encontrar valores para os coeficientes a_0, a_n e b_n que satisfaçam a igualdade. Como será visto na sequência, estes coeficientes podem ser determinados a partir das seguintes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Desta forma, conhecendo-se a função $f(x)$ pode-se determinar os coeficientes relacionados à sua expansão em séries de Fourier. Vale lembrar que neste caso está sendo considerado que $f(x)$ é periódica com período 2π. Além disso, considera-se que a função seja contínua por partes e que o resultado do somatório convirja. Para mostrar como uma função pode ser representada por uma expansão em séries de Fourier, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 01: Onda retangular. Obtenha os coeficientes de Fourier para a seguinte função $f(x)$ com período 2π:

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ k & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$



Os coeficientes de Fourier são avaliados em termos de uma integral de $-\pi$ até π. Como a função $f(x)$ é definida por partes, pode-se separar a integral para avaliar cada parte individualmente. Para o coeficiente a_0, temos:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

Substituindo os valores de $f(x)$ especificados:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -k dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} k dx = 0$$

De forma semelhante, para os coeficiente a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-k)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} k\cos(nx)dx$$

Avaliando as integrais:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(-k\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} \right) = 0$$

já que $\sin(nx) = 0$ para $x = 0$, $x = \pm\pi$ e $n = 1, 2, 3, \ldots$. Desta forma, a expansão neste caso não possui os termos associados ao cosseno. Para os coeficientes b_n, temos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-k)\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} k\sin(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(k\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - k\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} \right)$$

Substituindo os limites de integração:

$$b_n = \frac{k}{n\pi}(1 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + 1)$$

Considerando que $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, a expressão pode ser simplificada como:

$$b_n = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

Como $\cos(n\pi) = -1$ para n ímpar e $\cos(n\pi) = 1$ para n par, b_n pode ainda ser avaliado como:

$$b_n = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \dfrac{4k}{n\pi} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Ou seja:

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \qquad b_4, = 0 \qquad \ldots$$

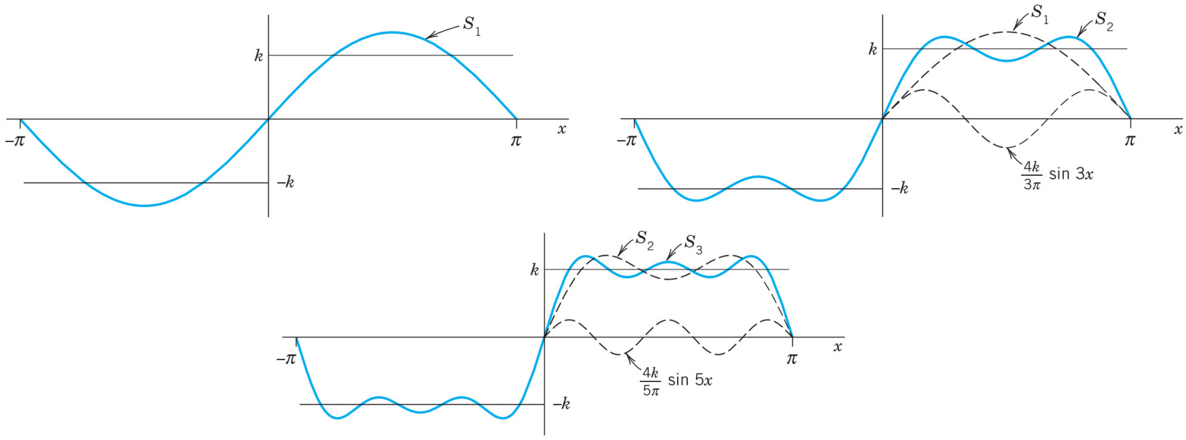
Como os coeficientes a são todos nulos, a expansão resulta em:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} \ldots \right)$$

O resultado se trata de uma expansão de infinitos termos. É comum a utilização de *somas parciais* para aproximar a função no intervalo. A soma parcial S_i corresponde aos i primeiros termos da expansão, por exemplo:

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\sin(x) \qquad S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} \right) \qquad \ldots$$

Quanto mais termos forem considerados na expansão, melhor será a aproximação. Na figura a seguir é ilustrado como as três primeiras somas parciais se aproximam da função original $f(x)$.



É importante ressaltar que a função aproximada em termos das séries de Fourier é uma função contínua em todo o intervalo, enquanto que $f(x)$ possui descontinuidades. Além disso, $f(x)$ não foi definida em $x = 0$ e $x = \pm\pi$, porém isto não interfere na determinação dos coeficientes pois estes são definidos em termos de integrais sobre uma área.

4.2 Funções com período arbitrário

Para uma função $f(x)$ com um período $p = 2L$ qualquer, a expansão em séries de Fourier é dada por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Para poder expressar a função desta forma, deve-se determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n. Para isso, é preciso recorrer a uma propriedade das funções seno e cosseno chamada *ortogonalidade*.

Ortogonalidade: O produto interno de duas funções $u(x)$ e $v(x)$ no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é definido como:

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx$$

As funções $u(x)$ e $v(x)$ são ditas ortogonais no intervalo se $(u, v) = 0$. De forma equivalente, um conjunto de m funções é dito ortogonal se cada par de funções diferentes do conjunto for ortogonal.

As funções $\cos(n\pi x/L)$ e $\sin(n\pi x/L)$ formam um conjunto ortogonal no intervalo $-L \leq x \leq L$. Isto implica que:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ L & \text{se} \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \qquad\qquad \forall\, m, n$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ L & \text{se} \quad m = n \end{cases}$$

4.2.1 Fórmulas de Euler-Fourier

Considere novamente a expansão de $f(x)$ em séries de Fourier:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\frac{n\pi x}{L}\right)$$

A função $f(x)$ é uma função conhecida, sendo que o objetivo agora é encontrar os valores dos coeficientes a_0, a_n e b_n que satisfaçam a igualdade, o que pode ser conseguido utilizando as relações de ortogonalidade.

Para determinar o valor de a_0, podemos integrar a expressão de $-L$ até L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = a_0\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

A segunda integral do lado direito pode ser avaliada como:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx = \left(\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = \frac{L}{n\pi}(\sin(n\pi) - \sin(-n\pi))$$

Como n é um inteiro positivo, $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$.

De forma semelhante:

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\left(\frac{L}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = -\frac{L}{n\pi}(cos(n\pi) - cos(-n\pi))$$

Considerando que $cos(x) = cos(-x)$, a integral acima também é nula. Com isso:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = a_0 2L \qquad \rightarrow \qquad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Multiplicando a equação por $cos(m\pi x/L)$, onde m é um inteiro positivo (constante) e integrando de $-L$ até L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = a_0\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$

Considerando ainda a ortogonalidade das funções, o único termo não-nulo do lado direito será a segunda integral quando $m = n$. Assim:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = La_n \qquad \rightarrow \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

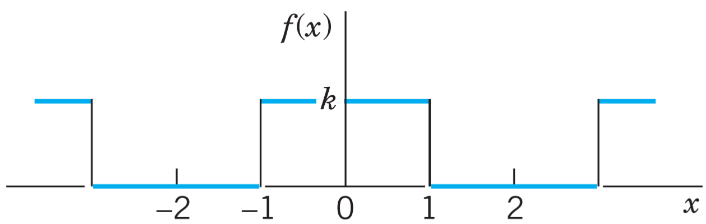
Pode-se obter uma expressão semelhante para b_n multiplicando a equação original por $\sin(n\pi x/L)$ e integrando de $-L$ a L:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

As expressões para a_n e b_n são conhecidas como fórmulas de Euler-Fourier. A determinação dos coeficientes neste caso segue as mesmas etapas que para o caso onde o período é 2π, como ilustrado no exemplo anterior.

Exemplo 02: Obtenha os coeficientes de Fourier para a seguinte função $f(x)$ com período $p = 4$, de modo que $L = p/2 = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 < x < -1 \\ k & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$



Avaliando inicialmente o coeficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1}(0)dx + \int_{-1}^{1} kdx + \int_{1}^{2}(0)dx\right) = \frac{k}{2}$$

Para os coeficientes a_n, temos:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{-1}^{1}k\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{1}^{2}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

Como as integrais nos intervalos onde $f(x) = 0$ são nulas:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

A expressão acima resulta em $a_n = 0$ para n par e $a_n = 2k/n\pi$ para $n = 1, 5, 9, \ldots$ e $a_n = -2k/n\pi$ para $n = 3, 7, 11, \ldots$.

De forma semelhante, para os coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{k}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{-n\pi}{2}\right) = 0$$

Para a expressão anterior, considerou-se que $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$. Assim, a função $f(x)$ pode ser expressa como:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Avaliando alguns termos dos somatório:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2} + \ldots\right)$$

4.3 Funções Pares e Ímpares

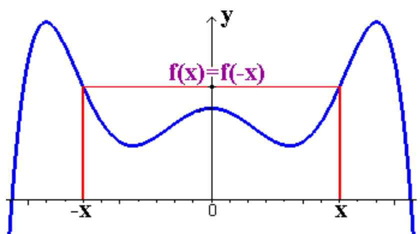
As fórmulas de Euler-Fourier podem ser simplificadas para o caso de funções pares ou ímpares. Uma função é dita par se:

$$f(-x) = f(x)$$

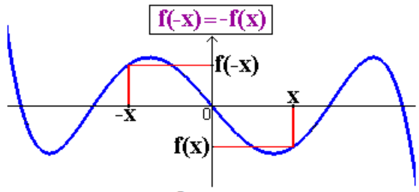
por exemplo, $cos(x)$ é uma função par. De forma semelhante, uma função é dita ímpar se:

$$f(x) = -f(-x)$$

por exemplo, $\sin(x)$ é ímpar. Na figura a seguir é ilustrado o comportamento geral de funções pares e ímpares. Uma dada função pode ser par, ímpar ou nenhuma das duas, porém caso a função for par ou ímpar a expansão em séries de Fourier é bastante simplificada



Par



ímpar

Considere uma função $f(x)$ definida em um intervalo de $x = -L$ até $x = L$. Caso esta função seja par, a área abaixo da curva no intervalo $(-L, 0)$ é igual à área no intervalo $(0, L)$, por isso a integral pode ser avaliada como:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Do mesmo modo, se $f(x)$ for ímpar, a integral nos dois intervalos é igual em módulo mas com sinal oposto, de modo que:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

Além disso, pode-se mostrar que o produto de duas funções pares ou duas ímpares será par, enquanto que o produto de uma função par por uma ímpar será ímpar. Como comentado anteriormente, as séries de Fourier podem ser simplificadas para funções pares ou ímpares, sendo que as séries obtidas nestes casos são chamadas de séries em cossenos e em senos, como será visto a seguir.

4.3.1 Séries em Cossenos

Considere que $f(x)$ seja uma função par e periódica com período $p = 2L$ definida no intervalo $-L < x < L$. Isto implica que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é par (produto de duas funções pares) e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ é ímpar (produto de uma par com uma ímpar). Como consequência:

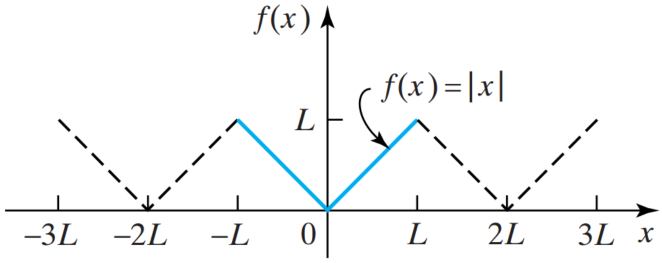
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Isto implica que:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$



Exemplo 03: Obtenha a representação em séries de Fourier para a função $f(x) = |x|$ no intervalo $-L < x < L$.

Como esta função é par, como consequência $b_n = 0$. Para os demais coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L x dx = \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \cos\frac{n\pi x}{L} dx$$

Esta integral pode ser avaliada por partes, fazendo $u = x$ e $v' = \cos(n\pi x/L)$, de modo que $v = (L/n\pi)\sin(n\pi x/L)$:

$$\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Assim:

$$\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L$$

Dessa forma, os coeficientes a_n serão:

$$a_n = \frac{2}{L}\left(\frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$$

Considerando que $\sin(n\pi) = 0$ o termo envolvendo o seno será nulo. Além disso, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, de modo que os coeficientes serão:

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como o termo $(-1)^n - 1$ será igual a zero para valores de n pares e igual a -2 para valores de n ímpares, a expansão para $f(x)$ será:

$$f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{L} + \frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi x}{L} + \ldots\right)$$

4.3.2 Séries em Senos

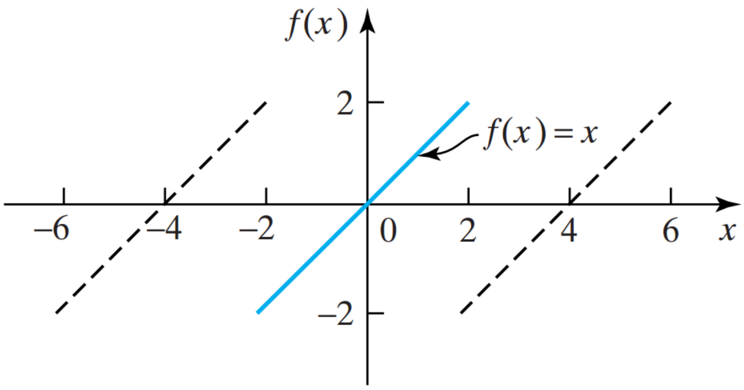
Considere agora que $f(x)$ seja uma função ímpar e periódica com período 2L definida no intervalo $-L < x < L$. Isto implica que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é ímpar e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ é par. Como consequência:

$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Assim:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Exemplo 04: Obtenha a representação em séries de Fourier para a função $f(x) = x$ no intervalo $-2 < x < 2$.



Neste caso trata-se de uma função ímpar, o que implica que $a_0 = a_n = 0$. Considerando que $L = 2$, os coeficientes b_n são:

$$b_n = 2\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

Resolvendo a integral por partes:

$$b_n = \left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

Considerando novamente que $\sin(n\pi) = 0$:

$$b_n = -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Assim, a expansão em séries de Fourier será:

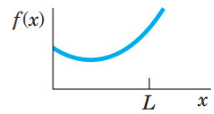
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \dots\right)$$

4.4 Expansão em Meio Período

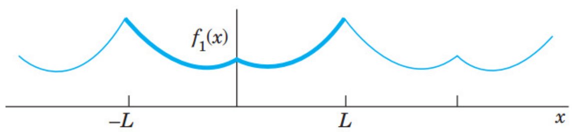
Como visto anteriormente, expressões simplificadas podem ser obtidas considerando que uma função $f(x)$ definida em um intervalo $-L \leq x \leq L$ é par ou ímpar. Na resolução de equações diferenciais parciais por separação de variáveis, é comum surgir funções definidas no intervalo $0 \leq x \leq L$. Neste caso, as relações anteriores podem ser úteis para definir as séries de Fourier para funções definidas somente nestes intervalo. Isto pode ser conseguido através da extensão da função $f(x)$ para um intervalo $[-L, L]$ de modo a se obter uma função para ou ímpar.

A forma como a função é definida no intervalo $-L \leq x < 0$ é irrelevante, já que o intervalo de solução é somente $0 \leq x \leq L$. Por isso, pode-se fazer uma extensão par ou ímpar da função, conforme for mais conveniente.

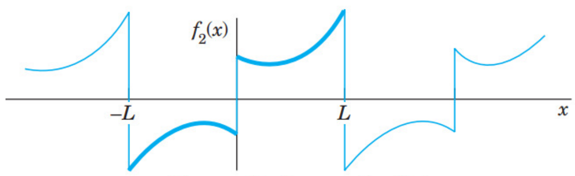
Por exemplo, considere uma função $f(x)$ definida em $[0, L]$, como apresentado na Figura a seguir.



Função f(x) original



Extensão par de f(x)



Extensão ímpar de f(x)

A extensão par desta função é definida como:

$$f_1 = \begin{cases} f(-x) & -L \leq x < 0 \\ f(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Dessa forma, a função f_1 é par e definida no intervalo $-L < x < L$, de modo que a série em cossenos pode ser aplicada. A extensão ímpar, por sua vez, é definida como:

$$f_2 = \begin{cases} -f(-x) & -L \leq x < 0 \\ f(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

De forma similar, f_2 é ímpar e definida no intervalo $-L < x < L$, de modo que a série em senos pode ser aplicada

Assim, pode-se usar as séries em seno ou em cosseno para avaliar qualquer função no intervalo $[0, L]$, ou seja, se f_1 e f_2 podem ser representadas no intervalo $[-L, L]$, então $f(x)$ pode ser representada em $[0, L]$.

Lista de Exercícios 04 - Séries de Fourier

01) Nos casos a seguir, faça um esboço do gráfico das funções dadas. Encontre a expansão em séries de Fourier para a função. Utilizando algum software específico, faça o gráfico da somas parciais da expansão considerando 5 ($S_5(x)$).

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

R: $f(x) = 1/2 + (2/\pi)(\sin x + (\sin 3x)/3 + (\sin 5x)/5 + \ldots)$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\pi/2 \\ x & -pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$

R: $f(x) = (2/\pi)(\sin x - (\sin 3x)/3^2 + (\sin 5x)/5^2 + \ldots) + (\sin 2x)/2 - (\sin 4x)/4 + (\sin 6x)/6 - \ldots$

c) $f(x) = x^2\ (0 < x < 2\pi)$

R: $f(x) = 4\pi^2/3 + 4(\cos x + (\cos 2x)/4 + (\cos 3x)/9 + \ldots) - 4\pi(\sin x + (\sin 2x)/2 + (\sin 3x)/3 + \ldots)$

d) $f(x) = \begin{cases} -4x & -\pi \leq x < 0 \\ 4x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

R: $f(x) = 2\pi - (16/\pi)(\cos x + (\cos 3x)/3^2 + (\cos 5x)/5^2 + \ldots)$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

R: $f(x) = 2 + (8/\pi)(\sin(\pi x/2) + (1/3)\sin(3\pi x/2) + (1/5)\sin(5\pi x/2) + \ldots)$

02) Encontre as expansões em séries de cossenos (a) e de senos (b) para as seguintes funções definidas no intervalo $0 < x < L$. Para isto, faça as extensões par e ímpar da função dada no intervalo $-L < x < 0$.

a) $f(x) = x \qquad (0 < x < 1/2)$

R: $(a) f(x) = 1/4 - (2/\pi^2)(\cos 2\pi x + (\cos 6\pi x)/9 + (\cos 10\pi x)/25 + \ldots) \qquad (b) f(x) = (1/\pi)(\sin 2\pi x - (\sin 4\pi x)/2 + (\sin 6\pi x)/3 - (\sin 8\pi x)/4 + \ldots)$

b) $f(x) = x^2 \qquad (0 < x < L)$

R: $(a) f(x) = L^2/3 - (4L^2/\pi^2)(\cos(\pi x/L) - (1/4)\cos(2\pi x/L) + (1/9)\cos(3\pi x/L) - \ldots) \qquad (b) f(x) = (2L^2/\pi)((1 - 4/\pi^2)\sin(\pi x/L) - (1/2)\sin(2\pi x/L) + (1/3 - 4/9\pi^2)\sin(3\pi x/L) - \ldots)$

5 Problema de Sturm-Liouville

5.1 Problemas de Valor de Contorno

As equações diferenciais de ordem maior podem gerar problemas de valor inicial (PVI) ou problemas de valor de contorno (PVC), dependendo da forma como as condições são especificadas. Por exemplo, considere a EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Até o momento, foram analisados principalmente casos onde condições iniciais conhecidas são especificadas da forma:

$$y(x_0) = y_0 \qquad\qquad y'(x_0) = y'_0$$

originando desta forma um PVI.

Em muitos casos, os problemas envolvem condições conhecidas em pontos diferentes do domínio de solução, sendo estas chamadas de ***condições de contorno***, podendo ser expressas, por exemplo, como:

$$y(\alpha) = y_0 \qquad\qquad y(\beta) = y_1$$

De forma geral, os PVC's envolvem uma coordenada espacial como variável independente. Assim, a resolução de um PVC's consiste em buscar uma solução que satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < x < \beta$ juntamente com as condições de contorno especificadas.

Se $g(x) = 0$, o PVI associado é homogêneo. No entanto, para um PVC ser considerado homogêneo, além de $g(x) = 0$, deve-se ter também que $y_0 = y_1 = 0$, ou seja, as condições de contorno devem ser nulas. Assim como para o caso de PVI, se um PVC for homogêneo, uma possível solução para o problema é $y = 0$. Esta solução é chamada de ***solução trivial*** do PVC homogêneo.

Os critérios adotados para determinar a existência e unicidade de PVI's não podem ser diretamente aplicados a PVC's. Em muitos casos, um PVC pode não possuir solução, possuir infinitas soluções ou só admitir a solução trivial (caso for homogêneo). Para ilustrar estes comportamento, considere os exemplos a seguir.

Exemplo 01: Obtenha a solução do seguinte PVC:

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 1 \qquad y(\pi) = 0$$

Utilizando o método da equação característica, a solução da EDO é da forma:

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Aplicando a condição $y(0) = 1$, obtém-se:

$$y(0) = 1 = c_1(1) + c_2(0) \qquad \rightarrow \qquad c_1 = 1$$

Aplicando agora a segunda condição, obtém-se:

$$y(\pi) = 0 = c_1(-1) + c_2(0) \qquad \rightarrow \qquad c_1 = 0$$

Como as duas expressões são incompatíveis, portanto o problema não possui solução.

Exemplo 02: Obtenha a solução do seguinte PVC:

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

A solução da EDO é a mesma do caso anterior:

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Aplicando a condição $y(0) = 0$, obtém-se:

$$y(0) = 0 = c_1(1) + c_2(0) \qquad \rightarrow \qquad c_1 = 0$$

Considerando $c_1 = 0$, a aplicação da segunda condição resulta em:

$$y(\pi) = 0 = c_2 \sin(\pi) = c_2(0) = 0$$

Esta condição é satisfeita para qualquer valor de c_2, portanto existem infinitas soluções para o PVC.

5.2 Problemas de Autovalor

Em muitos casos os problemas de valor de contorno possuem um parâmetro λ em aberto que pode assumir diferentes valores, sendo que o problema só irá admitir soluções não-triviais para determinados valores deste parâmetro.

Por comparação, considere um sistema linear da forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Este problema admite a solução $\mathbf{x} = 0$ para qualquer valor de λ, porém, para determinados valores de λ (chamados autovalores) existem também soluções não-triviais (chamadas de autovetores).

Considere agora o PVC:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y(L) = 0$$

De forma semelhante, $y(x) = 0$ é uma possível solução para qualquer valor de λ, porém, novamente iríamos obter a solução trivial. Os valores de λ para os quais a equação tem soluções não-triviais são chamados, por analogia, de ***autovalores*** e as soluções associadas de ***autofunções***.

Pode-se mostrar que o problema anterior em específico só irá admitir soluções não-triviais quando $\lambda > 0$. Neste caso, a equação característica é $r^2 + \lambda = 0$, de modo que as raízes serão $r = \pm\sqrt{\lambda}i$ e a solução geral é:

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando a condição de contorno $y(0) = 0$, temos que:

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_1 = 0$$

Aplicando agora condição $y(L) = 0$, temos:

$$y(L) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

Novamente, esta condição pode ser satisfeita aplicando $C_2 = 0$, no entanto, isto irá levar à solução trivial. Oura maneira de satisfazer a condição é:

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

A função seno possui valor nulo para os múltiplos inteiros de π:

$$\sqrt{\lambda}L = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots = n\pi$$

Isolando os autovalores:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

O caso $n = 0$ pode ser omitido pois também irá levar à solução trivial. Neste caso, o valor da constante C_2 é arbitrário, pois automaticamente a equação diferencial e as condições de contorno serão satisfeitas para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Desse modo, existem infinitas soluções para o PVC que podem ser expressas como:

$$y(x) = C_n \sin(n\pi x/L) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Exemplo 03: Encontre os autovalores e as autofunções associadas ao seguinte problema de autovalor:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y'(L) = 0$$

5.3 Equação de Sturm-Liouville

A resolução de diversas equações diferenciais parciais de grande importância através do método de separação de variáveis origina problemas de autovalor similares aos apresentados anteriormente. Porém, dependendo da equação e das condições de contorno associadas, problemas mais complexos podem surgir. De forma geral, estes problemas são casos específicos da equação de Sturm-Liouville. Esta equação é uma EDO de segunda ordem da forma:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda r(x))y = 0$$

ou ainda, em uma notação mais compacta:

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0$$

onde λ é um parâmetro e a equação é definida em algum intervalo $a \leq x \leq b$. Na maioria dos casos, as condições de contorno utilizada para esta equação podem sem expressas de maneira geral como:

$$k_1 y + k_2 y' = 0 \qquad \text{em} \qquad x = a$$

$$l_1 y + l_2 y' = 0 \qquad \text{em} \qquad x = b$$

onde k_1, k_2, l_1 e l_2 são constantes. Pelo menos um dos valores de k e de l devem ser diferentes de zero, o que pode ser expresso como $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ e $l_1^2 + l_2^2 \neq 0$. A EDO anterior, em conjunto com estas condições de contorno, forma o *problema de Sturm-Liouville*. Os problemas de autovalor vistos anteriormente são casos particulares do problema de Sturm-Liouville. Além disso, uma série de importantes equações importantes na área de engenharia podem ser escritas com equações de Sturm-Liouville, como mostrado no quadro a seguir.

TABLE 8.3 $p(x), q(x), r(x)$ and λ for Some Named Equations

Name	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	λ
Simple harmonic equation	1	0	1	n^2
Legendre's equation	$1 - x^2$	0	1	$\alpha(\alpha + 1)$
Bessel's equation	x	$-\nu^2/x$	x	k^2
Bessel's modified equation	x	$-\nu^2/x$	$-x$	k^2
Laguerre equation	xe^{-x}	0	e^{-x}	n
Chebyshev equation	$(1 - x^2)^{1/2}$	0	$(1 - x^2)^{-1/2}$	n^2
Hermite equation	e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	$2n$

Como pode ser visto, a solução trivial $y = 0$ é uma possível solução para o problema de Sturm-Liouville para qualquer valor de λ. Assim como para os outros casos, neste caso também irão existir soluções não-triviais (autofunções) para determinados valores de λ (autovalores).

Pode-se mostrar que para o caso onde $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ e $p'(x)$ forem funções reais e contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$ e $r(x)$ for positiva ou negativa em todo o intervalo, então todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville serão reais. Este resultado não será demonstrado aqui, porém a demonstração pode ser encontrada em diversos livros-texto.

Outra característica importante da solução dos problemas de Sturm-Liouville é que elas formam um conjunto ortogonal com relação à função peso $r(x)$. Isto significa que dadas duas soluções $y_m(x)$ e $y_n(x)$ associadas a dois autovalores distintos λ_m e λ_n, então:

$$\int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \qquad\qquad m \neq n$$

De acordo com as condições de contorno e com o comportamento da função $p(x)$ nas fronteiras do domínio, três classes de problemas podem surgir, sendo chamados de problemas regular, periódico e singular, como será visto a seguir.

5.3.1 Problema de Sturm-Liouville Regular

O problema de Sturm-Liouville é chamado de regular se $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todo o intervalo $a \leq x \leq b$ e $r(x)$ for contínua em todo o intervalo. Para o caso de problemas regulares e periódicos, pode-se mostrar que existem infinitos autovalores reais que podem ser arrajados da forma:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

com o menor autovalor λ_1 sendo um valor finito e:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

Para o caso de problemas regulares, estes infinitos autovalores também são ***simples***, o que significa que para cada autovalor existe exatamente uma autofunção linearmente independente associada.

Exemplo 04: Encontre os autovalores e autofunções associadas ao seguinte problema de Sturm-Liouville regular:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(1) + y'(1) = 0$$

5.3.2 Problema de Sturm-Liouville Periódico

Esta classe de problema surge quando a função $p(x)$ e as condições de contorno envolvendo $y(x)$ e $y'(x)$ são periódicas no intervalo $a \leq x \leq b$, de modo que as condições de contorno podem ser expressas como:

$$p(a) = p(b), \qquad y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b)$$

Os problemas de Sturm-Liouville periódicos mantém as propriedades de possuírem somente autovalores reais e gerarem um conjunto ortogonal de autofunções, porém neste caso não existe necessariamente uma única autofunção associada a cada autovalor, ou seja, os autovalores não são simples.

Exemplo 04: Encontre os autovalores e autofunções associadas ao seguinte problema de Sturm-Liouville periódico:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = y(\pi) \qquad y'(0) = y'(\pi)$$

5.3.3 Problema de Sturm-Liouville Singular

Os problemas de Sturm-Liouville singulares correspondem a casos onde as funções $p(x)$ ou $r(x)$ se anulam em alguma das extremidades do intervalo $a \leq x \leq b$, por exemplo, $p(a) = 0$ ou $p(b) = 0$. De forma equivalente, estes problemas surgem quando o intervalo avaliado consiste em um meio semi-infinito.

No caso de problemas singulares onde a função se anula em uma das extremidades, ou seja, onde uma das extremidades é um ponto singular, a condição de contorno imposta neste ponto singular é de forma que se exige que a função seja limitada neste ponto. Isto implica que a solução não pode tender a mais ou menos infinito nesta extremidade, mantendo assim uma representação coerente de um processo físico.

Exemplo 05: Encontre os autovalores e autofunções associadas à seguinte equação de Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - n^2) y = 0$$

em um intervalo $0 \leq x \leq a$, onde a solução deve permanecer limitada em $x = 0$ e $y(a) = 0$.

Primeiramente, é importante observar que a equação de Bessel pode ser escrita como um equação de Sturm-Liouville, da forma:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (k^2 x - n^2/x)y = 0$$

onde identifica-se que $p(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, $r(x) = x$ e $\lambda = k^2$. Como pode ser percebido, na extremidade $x = 0$ temos que $p(0) = 0$ e portanto trata-se de um problema singular.

A solução geral desta equação pode ser obtida através do método de Frobenius e envolve as funções de Bessel de primeira espécie (J_n) e as funções de Bessel de segunda espécie (Y_n) (considerando n como um inteiro):

$$y(x) = c_1 J_n(kx) + c_2 Y_n(kx)$$

A condição em $x = 0$ exige que a solução seja limitada neste ponto. As funções $J_n(x)$ são limitadas na origem, porém as funções $Y_n(x)$ tendem a menos infinito. Dessa forma, para que a solução permanece limitada, deve-se impor que $c_2 = 0$, de forma que a solução será:

$$y(x) = c_1 J_n(kx)$$

A segunda condição de contorno é da forma $y(a) = 0$, que pode ser satisfeita fazendo $c_1 = 0$ (o que leva à solução trivial) ou considerando que:

$$J_n(ka) = 0$$

Dessa forma, o termo ka deve corresponder a um dos zeros da função $J_n(x)$. Por simplicidade, considere que estes zeros sejam chamados de $j_{n,r}$, com $r = 1, 2, 3, \ldots$, sendo que para a função de cada ordem n existem infinitos zeros. Isto implica que:

$$ka = j_{n,r} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{j_{n,r}}{a} \qquad\qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

De modo que os autovalores serão

$$\lambda_n = \frac{j_{n,r}^2}{a^2} \qquad\qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

e as autofunções associadas:

$$y(x) = c_n J_n(j_{n,r}x/a), \qquad\qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Para cada valor de $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ irá existir $r = 1, 2, 3, \ldots$ autovalores associados, existindo também uma autofunção associada a cada um destes autovalores.

Lista de Exercícios 05 - Problemas de Sturm-Liouville

1) Considere o problema de autovalor:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad\qquad y(L) = 0\,, L > 0$$

Mostre que para os casos $\lambda < 0$ e $\lambda = 0$ o problema só admite a solução trivial $y(x) = 0$.

2) Encontre a solução particular dos seguintes Problemas de Valor de Contorno ou mostre que o problema não possui solução ou possui infinitas soluções.

a) $y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(\pi) = 1$
R: $y(x) = -sin(x)$

b) $y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0$
R: $y(x) = c_1 \sin(x)$ (Infinitas soluções)

c) $y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 1$
R: Sem solução

d) $y'' + 4y = \sin(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0$
R: $y(x) = c_1 \sin(2x) + \sin(x)/3$ (Infinitas soluções)

e) $y'' + 4y = \sin(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(\pi) = 0$
R: $y(x) = \sin(x)/3 - \sin(2x)/6$

3) Encontre os autovalores que garantem solução não-trivial para os seguintes Problemas de Sturm-Liouville. Encontre também a solução do problema associada com os autovalores (autofunções).

a) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$
R: $\lambda = n^2, \quad y(x) = C_n \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(\pi) = 0$
R: $\lambda = ((2n-1)/2)^2, \quad y(x) = C_n \sin((2n-1)x/2), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$
R: $\lambda = ((2n-1)/2)^2, \quad y(x) = C_n \cos((2n-1)x/2), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

d) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y(L) = 0$
R: $\lambda = ((2n-1)\pi/2L)^2, \quad y(x) = C_n \cos((2n-1)\pi x/2L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

e) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y'(L) = 0$
R: $\lambda = (n\pi/L)^2, \quad y(x) = C_n \cos(n\pi x/L), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

f) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y(-1) = y(1) \qquad y'(-1) = y'(1)$
R:

6 Método de Separação de Variáveis

Diversas equações diferenciais parciais com estrutura simples podem ser resolvidas de forma analítica, sendo o método de separação de variáveis um dos mais empregados. Por exemplo, as equações do calor, de Laplace e da onda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

são exemplos de equações com grande potencial de aplicação que podem ser resolvidas por separação de variáveis.

A estratégia geral do método de separação de variáveis é supor que as funções de duas (ou mais) variáveis que são a solução da EDP podem ser expressas como o produto de funções de uma única variável. Por exemplo, uma solução da forma $u(x,t)$ pode ser expressa como:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

caso for possível determinar funções $X(x)$ e $T(t)$ que satisfaçam a equação diferencial parcial em conjunto com as condições iniciais e de contorno impostas, terá se encontrado uma solução para o problema. Para ilustrar a aplicação deste método, será considerado primeiramente a equação do calor com condições homogêneas. Cabe ressaltar que caso alguma condição de contorno ou inicial for alterada, a solução deve ser obtida novamente. Porém, primeiramente será apresentada uma revisão sobre a classificação das equações diferenciais parciais com base no comportamento físico descrito por cada classe de equação.

6.1 Características Gerais das EDP's

Uma equação diferencial parcial é uma equação representando a relação entre uma função de duas ou mais variáveis independentes e as derivadas parciais desta função com respeito a estas variáveis independentes. Nos problemas encontrados com mais frequência na engenharia, as variáveis independentes são usualmente as dimensões espaciais x, y e z e o tempo t.

Dentre as características gerais mais importantes para o estudo e classificação das EDP's, pode-se destacar a ordem, linearidade e homogeneidade:

- A ordem de uma equação diferencial é definida como a ordem da derivada de maior ordem presente. Na maioria dos casos (quando termos difusivos são considerados) obtém-se equações de segunda ordem;

- Uma EDP é dita linear se todas as derivadas parciais (incluindo de ordem zero, ou seja, a própria variável dependente) aparecem de uma forma linear e se nenhum dos coeficientes depende da variável dependente;

- A homogeneidade está relacionada com a presença de algum termo que não esteja multiplicado pela variável dependente ou alguma de suas derivadas, sendo uma EDP dita homogênea se nenhum destes termos aparecer na equação. Na maioria dos casos, os termo não-homogêneos estão diretamente relacionados com termos fonte, ou seja, aqueles que não dependem da variável dependente (taxas de geração/consumo, por exemplo).

Além destas classificações comuns a todas as equações diferenciais, as EDP's podem ser classificadas de acordo com como uma perturbação irá se propagar pelo domínio de solução, do ponto de vista geométrico. Esta classificação define a forma como a equação pode ser resolvida e quais os métodos mais adequados, sendo portanto esta classificação fundamental para uma análise correta do problema.

De forma geral os problemas modelados por EDP's são resolvidos com quatro variáveis independentes (três direções espaciais e o tempo). No entanto, a classificação geral pode ser analisadas considerando-se o caso de equações com somente duas variáveis independentes. Além disso, será considero que a EDP é linear. A análise de EDP's não-lineares é mais complexa, porém em muitos casos os problemas podem ser modelados ou aproximados por EDP's lineares. Não-linearidades normalmente estão associados à dependência de algum coeficiente com as variáveis dependentes. Por exemplo, a aplicação das equações de conservação de momento para fluidos não-newtonianos leva a EDP's não-lineares, pois a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear. De forma semelhante, caso a condutividade térmica de um material depender da temperatura, as equações de transferência de calor neste material serão não-lineares.

6.1.1 Classificação das EDP's de 2ª Ordem Lineares

De forma geral, uma EDP linear de segunda ordem contendo duas variáveis independentes x e y com uma variável dependente ϕ pode ser expressa como:

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi + G = 0 \tag{6.1}$$

os coeficientes A, B, C, D, E, F e G podem ser funções das variáveis independentes x e y, mas não da variável ϕ.

A equação característica associada a esta EDO é da forma:

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 0$$

As EDP's são classificadas com base no *discriminante* $\delta = B^2 - 4AC$. As equações onde $\delta < 0$, $\delta = 0$ e $\delta > 0$ são chamadas, respectivamente de *elípticas, parabólicas e hiperbólicas*, sendo que muitas características fundamentais das equações, incluindo os métodos numéricos mais apropriados para resolver a equação, estão diretamente relacionados com esta classificação. Observe que a natureza da equação depende somente dos coeficientes associados com os termos de segunda ordem, sendo que os termos de primeira e de ordem zero não possuem nenhuma influência na classificação.

A classificação das EDP's como elípticas, parabólicas e hiperbólicas está diretamente relacionada com a presença ou não de *caminhos característicos* nas equações. O caminho característico representa a direção no domínio de solução onde a informação é transportada. Por exemplo, considere o caso onde uma determinada espécie química se propaga em um meio contínuo. Caso o meio for estacionário (por exemplo, um perfume difundido em uma sala com ar estagnado), a propagação será em todas das direções, sem uma direção preferencial. Neste caso, diz-se que não existe um caminho preferencial. Porém, caso exista um campo de velocidades (por exemplo, se um ventilador for ligado), a propagação irá ocorrer com maior intensidade em uma direção, neste caso existe então um caminho característico.

A quantidade de caminhos característicos está associado com as raízes da equação característica, conforme a tabela a seguir.

A presença de caminhos característicos no domínio de solução leva ao conceito de *domínio de dependência* e *domínio de influência*. Considere um ponto P no domínio de solução. O domínio de dependência do ponto P é definido como a região do domínio de solução que afeta o ponto P. Assim, o ponto P depende de tudo que acontece no domínio de dependência.

$B^2 - 4AC$	Raízes da eq. caract.	Caminhos caract.	Classificação
< 0	Complexas	0	Elíptica
$= 0$	Real e repetida	1	Parabólica
> 0	Reais e distintas	2	Hiperbólica

O domínio de influência do ponto P é definido como a região do domínio de solução que é influenciada pelo ponto P, ou seja, o ponto P afeta tudo que está em seu domínio de dependência. Caso uma perturbação seja causada no ponto P, esta perturbação irá afetar tudo que está no domínio de influência de P. De forma semelhante, qualquer perturbação no domínio de dependência irá afetar a solução no ponto P.

As equações parabólicas e hiperbólicas possuem caminhos característicos reais e, como consequência, domínios de dependência e de influência específicos. As equações elípticas, no entanto, não possuem caminhos característicos. Neste caso, tanto o domínio de dependência quanto o de influência correspondem a todo o domínio de solução da equação. Estes resultados são ilustrados na Figura 1.

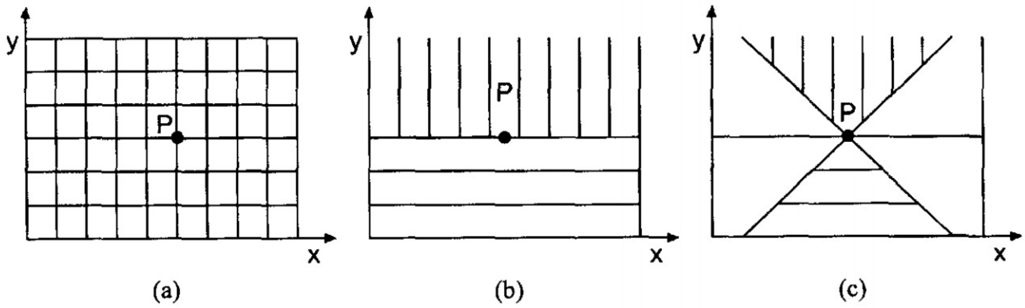


Figura 6.1: Domínio de dependência (linhas horizontais) e de influência (linhas verticais) para EDP's (a) elípticas, (b) parabólicas e (c) hiperbólicas. y e x representam as variáveis independentes.

Em resumo, a interpretação física da classificação das EDP's pode ser explicada em termo da equação característica:

- Se raízes reais existirem (EDP's parabólicas e hiperbólicas), caminhos preferenciais de propagação de informação existem, sendo que a velocidade de propagação irá depender da inclinação dos caminhos característicos. Como consequência, domínios de influência e dependência específicos irão existir para cada ponto no domínio de solução. Problemas físicos governados por este tipo de equação são chamados de *problemas de propagação* e usualmente estão associados a um comportamento transiente;

- Se as raízes da equação característica forem complexas (EDP elíptica), não existe um caminho preferencial de propagação. A solução em cada ponto influencia e é influenciada pela solução em todos os outros pontos do domínio de solução. Os problemas físicos governados por este tipo de equação são chamados de *problemas de equilíbrio*, estando associados com problemas estacionários.

EDP's Elípticas, $\delta < 0$

As EDP's elípticas surgem naturalmente quando o termo de derivada cruzada é nulo e A e C (coeficientes associados às derivadas de 2^a ordem) são positivos. Um exemplo de EDP elíptica é a Equação de Laplace mencionada anteriormente.

Considere, por exemplo, a equação que descreve a condução de calor em um meio bidimensional $(B = 0, A = 1, C = 1)$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Esta equação admite solução analítica através do método de separação de variáveis. No entanto, para fins de definir as características geras associadas às equações elípticas, a equação para condução unidimensional mantém todas as características mais importantes associadas e por isso será usada como exemplo.

Considere a equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Com condições de contorno de temperatura fixa $T(0) = T_0$ e $T(L) = T_L$, com $T_L > T_0$. A solução desta equação é da forma:

$$T(x) = T_0 + \frac{(T_L - T_0)}{L}x$$

Esta equação apresenta duas características associadas ao comportamento elíptico da equação:

1 - A temperatura em qualquer ponto P no domínio é influenciada pela temperatura nas duas extremidades $x = 0$ e $x = L$;

2 - Na ausência de termos-fonte, $T(x)$ é limitada pelas temperaturas nas extremidades, sendo que $T(x)$ não pode ser maior que T_L nem menor que T_0.

Como esta equação não possui caminhos característicos, os domínios de dependência e de influência são iguais a todo o domínio de solução. Além disso, como a derivada não apresenta nenhuma descontinuidade ao longo do domínio, a distribuição de temperatura será contínua.

EDP's Parabólicas, $\delta = 0$

As EDP's parabólicas surgem quando $B = 0$ e $A = 0$ ou $C = 0$. Um exemplo clássico de EDP parabólica é a equação da difusão (de calor ou massa) transiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Esta equação é uma EDP de segunda ordem em relação a x, sendo portanto necessário especificar duas condições de contorno, por exemplo:

$$T(0,t) = T_0 \qquad\qquad T(L,t) = T_0$$

Em relação ao tempo, a equação é de primeira ordem, de modo que somente uma condição inicial precisa ser especificada, por exemplo:

$$T(x,0) = T_i$$

Esta é uma característica das EDP's parabólicas, onde não é necessário definir duas condições para uma das variáveis, ou seja, não é necessário definir uma condição final para o sistema (não é preciso prever o futuro para resolver a EDP!).

Utilizando o método de separação de variáveis, obtém-se a seguinte solução para a EDP:

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(c_n^1 x) e^{c_n^2 t}$$

onde

$$c_n^1 = \frac{n\pi}{L} \qquad\qquad c_n^2 = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2}$$

e

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L (T_i - T_0) \sin(c_n^1 x) dx$$

ou seja, B_n é uma função da condição inicial e da direção x.

Através desta solução, pode-se observar que:

- A temperatura nas extremidades, T_0, influencia a temperatura $T(x,t)$ em qualquer ponto do domínio, da mesma forma que para as EDP's elípticas;

- A condição inicial T_i influencia a temperatura para todos os tempos futuros. No entanto, como c_n^2 é negativo, esta influência diminui com o passar do tempo. No limite quando $t \to \infty$, esta influência tende a zero e a equação passa a ter um comportamento elíptico;

- A temperatura em qualquer ponto do domínio de solução é limitada pelas condições de contorno e inicial.

Com base neste exemplo, pode-se perceber que a variável t possui um comportamento bem distinto da variável x. As variações em t admitem somente influência em *uma direção*, enquanto que as variações em x ocorrem em *duas direções*. Como, neste caso, t representa o tempo, este comportamento já é esperado pelo comportamento físico do sistema (o presente altera somente o futuro e não o passado), no entanto, este comportamento é observado em qualquer EDP parabólica, mesmo quando somente variáveis espaciais são consideradas. Por exemplo, no escoamento no interior de tubos (função das direções radial e axial), a direção axial possui um comportamento parabólico. Os métodos numéricos utilizados para este tipo de equação devem considerar este comportamento, sendo necessário o uso de métodos de *marcha no tempo* (*time-marching*) para a resolução da equação.

EDP's Hiperbólicas, $\delta > 0$

Considere o caso do escoamento unidimensional transiente de um fluido no interior de um tubo com uma velocidade constante $U > 0$. O fluido é alimentado a uma temperatura T_0 e, nas condições do escoamento, a transferência de calor por condução pode ser desprezada. A equação que descreve a variação da temperatura ao longo do escoamento é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p U T) = 0$$

com as condições:

$$T(x,0) = T_i \qquad\qquad T(0,t) = T_0$$

Apesar de possuir some termos de primeira ordem, está é uma equação hiperbólica. Para provar isto, basta diferenciar a equação em relação a t ou a x, onde se obtém que os coeficientes A ou C são nulos e $B > 0$, considerando que as propriedades físicas e a velocidade são positivas.

A solução para este problema será uma função descontínua da forma:

$$T(x,t) = \begin{cases} T_i & t < \dfrac{x}{U} \\ T_0 & t \geq \dfrac{x}{U} \end{cases}$$

Basicamente, esta função representa uma descontinuidade (degrau) na solução que viaja ao longo do domínio. Neste caso, o termo x/U funciona como um *tempo característico*.

Conforme o fluido é alimentado com uma temperatura T_0, leva um determinado tempo para que este afete a temperatura em um posição x longe da entrada, sendo este tempo uma função *somente* da velocidade U.

Com base nesta solução, pode-se observar as seguintes características associadas com as EDP's hiperbólicas:

- A condição de contorno especificada em $x = 0$ afeta somente a temperatura para $x > 0$. Caso valores de $x < 0$ fossem avaliados, estes não seriam afetados por T_0;

- A condição de contorno na entrada se propaga ao longo do domínio de solução com uma velocidade finita U;

- Qualquer variação nas condições da entrada não serão sentidas em um ponto x até que $t = x/U$.

6.2 Separação de Variáveis Aplicada à EDP Parabólicas

Considere, por exemplo, um problema envolvendo a condução de calor unidirecional em uma barra com comprimento L. A variação na temperatura ao longo da direção x e do tempo é dada por uma equação a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde α é a difusividade térmica do material. Considere que as extremidades da barra são mantidas em temperaturas constantes, de modo que, na forma adimensional, as condições de contorno podem ser expressas como:

$$u(0, t) = 0 \qquad\qquad u(L, t) = 0$$

Além disso, considere que a distribuição inicial de temperatura é dada por:

$$u(x, 0) = f(x)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária.

Esta equação representa uma EDP linear, de segunda ordem e homogênea. O método de separação de variáveis consiste em supor que as soluções da EDP podem ser expressas como:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

ou seja, como o produto de uma função somente de x e outra somente de t. Substituindo na equação diferencial:

$$\frac{\partial(X(x)T(t))}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2(X(x)T(t))}{\partial x^2}$$

Considerando que as funções são consideradas constantes quando derivadas em relação a outra variável, a equação pode ser reescrita como:

$$XT' = \alpha T X'' \qquad \rightarrow \qquad \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T}$$

Desta forma, chega-se em uma relação do tipo $f(x) = g(t)$. Como tanto x quanto t são variáveis independentes, $g(t)$ não varia com x, da mesma forma que $f(x)$ não varia com t. A única forma de satisfazer esta igualdade é se ambas as funções forem iguais a uma constante. Esta constante será denominada de $-\lambda$, sendo que o sinal de menos é utilizado para simplificar a solução. Com isso:

$$XT' = \alpha T X'' \qquad \rightarrow \qquad \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

Assim, obtém-se duas EDO's:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad\qquad T' + \alpha\lambda T = 0$$

Estas equações não são acopladas, portanto podem ser resolvidas separadamente para qualquer valor de λ. No entanto, busca-se soluções que além de satisfazer a EDP original, também satisfaçam as condições impostas. A equação para T, em conjunto com a condição inicial $u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x)$ formam um Problema de Valor Inicial e pode ser facilmente resolvida, desde que seja conhecida a função $X(x)$ e $f(x)$ seja especificada.

A equação para $X(x)$, por sua vez, deve ser satisfeita em duas posições (contornos) diferentes: $x = 0$ e $x = L$. Neste caso, a equação e as condições de contorno formam um Problema de Valor de Contorno.

6.2.1 Resolução do Problema de Valor de Contorno

Considere o PVC avaliado anteriormente:

$$X'' + \lambda X = 0$$

As condições de contorno associada são:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \qquad\qquad u(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

Uma maneira de satisfazer as condições é impondo que $T(t) = 0$. No entanto, isto implica que $u(x,t) = X(x)T(t) = 0$ em qualquer ponto (solução trivial). Para evitar esta solução, deve ser considerado que:

$$X(0) = 0 \qquad\qquad X(L) = 0$$

Com isso, a EDO de segunda ordem possui duas condições de contorno associadas. Deve-se agora busca soluções que satisfaçam a equação $X'' + \lambda X = 0$ e as condições impostas. Esta solução pode existir somente para determinados valores de λ. Neste caso, a equação:

$$X'' + \lambda X = 0$$

forma um problema de autovalor.

O problema anterior só irá admite soluções não-triviais para o caso $\lambda > 0$. Esta equação, em conjunto com as condições de contorno anteriores, foram resolvidos na aula anterior, onde obtéve-se os seguintes autovalores:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e a solução associada ao problema obtida foi:

$$X(x) = C2_n \sin(n\pi x/L) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

6.2.2 Resolução do Problema de Valor Inicial

A partir do conhecimento dos autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, a EDO para $T(t)$ pode ser reescrita como:

$$T' + \alpha\lambda T = 0 \qquad \rightarrow \qquad T' + \frac{\alpha n^2\pi^2}{L^2}T = 0$$

Definindo $\mu = \alpha\pi^2/L^2$:

$$T' + \mu n^2 T = 0$$

A equação pode ser facilmente resolvida usando o método do fator integrante:

$$T(t) = C3_n e^{-\mu n^2 t} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A constante $C3_n$ depende do valor de n considerado. Com isso, a solução do EDP inicial pode ser expressa como:

$$u(x,t) = X(x)T(t) = C3_n e^{-\mu n^2 t} C2_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = C_n e^{-\mu n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para cada valor de n, obtém-se uma solução que satisfaz a equação diferencial em conjunto com as condições de contorno associadas. No entanto, a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ ainda não foi satisfeita.

Assim como visto anteriormente para PVI's de segunda ordem, se duas funções são soluções de uma determinada equação diferencial, então qualquer combinação linear entre elas também será solução. Este comportamento pode também ser estendido para este caso, de modo que as soluções para cada valor de n podem ser agrupadas em uma combinação linear, de modo que esta combinação também será solução da equação diferencial e irá satisfazer as condições de contorno. Caso for possível determinar os coeficientes de modo que a condição inicial também seja satisfeita, terá se encontrado uma solução da equação em conjunto com todas as condições impostas.

6.2.3 Superposição das Soluções

Para cada valor de n será obtida uma solução que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno em $x(0)$ e $x(L)$.

Princípio da Superposição: Se os termos do conjunto $u_n = u_1, u_2, \ldots , u_N$ são soluções de uma EDP linear homogênea, então a combinação linear:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_N u_N$$

também será uma solução. Além disso, se u_n contém todas as soluções possíveis da equação, então u com certeza engloba o conjunto fundamental de soluções da equação.

Considerando o princípio de superposição, a solução geral da EDP será a soma das soluções para cada valor de n multiplicadas por uma constante:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu n^2 t} \sin\left(n\pi x/L\right)$$

Considerando que a função seno está limitada no intervalo $[-1, 1]$ e μ é uma constante positiva, esta série converge no intervalo $0 < x < L$.

Esta solução satisfaz as condições de contorno, porém, a solução do problema deve também satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Substituindo na solução geral:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

Assim, deve-se determinar os valores de C_n de tal forma que o somatório convirga para $f(x)$ em $t = 0$, como será apresentado a seguir.

6.2.4 Solução Particular da Equação do Calor

A equação obtida anteriormente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde $f(x)$ é uma função conhecida, corresponde exatamente a séries de Fourier em senos. Portanto, os coeficientes são dados por:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Os valores de C_n poderiam também ser obtidos multiplicando-se a equação anterior por $sin(m\pi x/L)$, com m sendo um inteiro positivo, integrando de $-L$ a L e utilizando as relações de ortogonalidade.

Desse modo, a solução particular do problema é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Por exemplo, considere um caso onde $f(x) = 1$. Com isso, pode-se obter que:

$$C_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

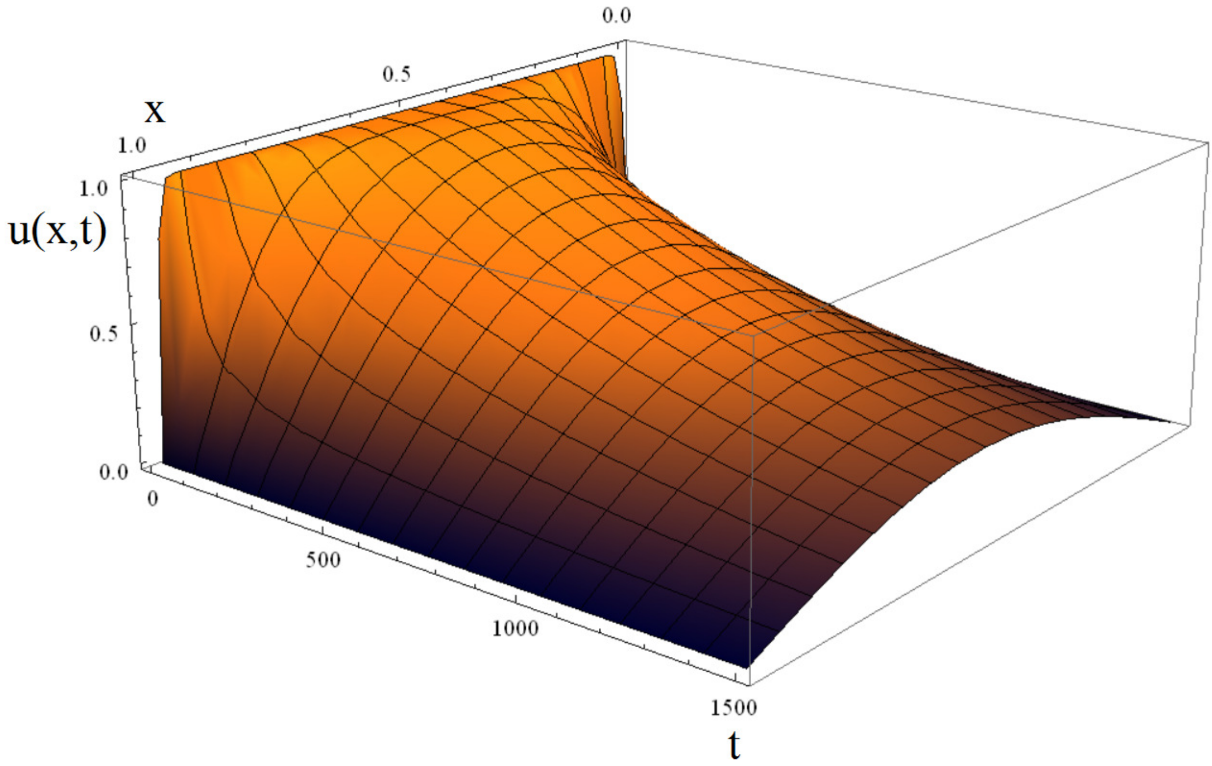
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))\right)e^{-\mu n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

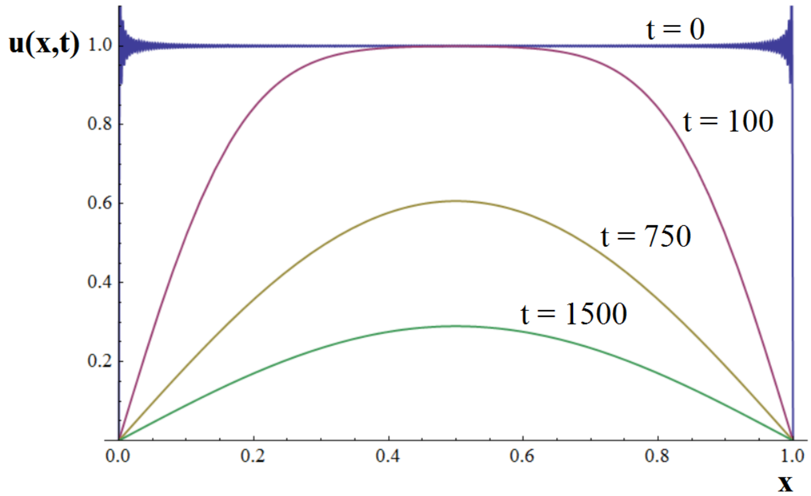
A partir do conhecimento dos parâmetros L e $\mu = \alpha\pi^2/L^2$, pode-se obter a solução para qualquer x e t. Para ilustrar, considere um caso onde $L = 1$ e $\alpha = 10^{-4}$. A variação na temperatura $u(x,t)$ é ilustrada na figura a seguir.

Para ilustrar melhor, na figura a seguir são apresentadas as curvas de $u(x,t)$ para diferentes valores de t. Estes resultados foram obtidos considerando 500 termos na série de Fourier.

Como pode ser visto, para $t = 0$ a solução apresenta uma pequena oscilação. Isto se deve a uma inconsistência que existe entre as condições de contorno e a condição inicial. Por exemplo, a condição de contorno em $x = 0$ expressa que:

$$u(0,t) = 0$$





Em contrapartida, a condição inicial (considerando $f(x0) = 1$) implica que:

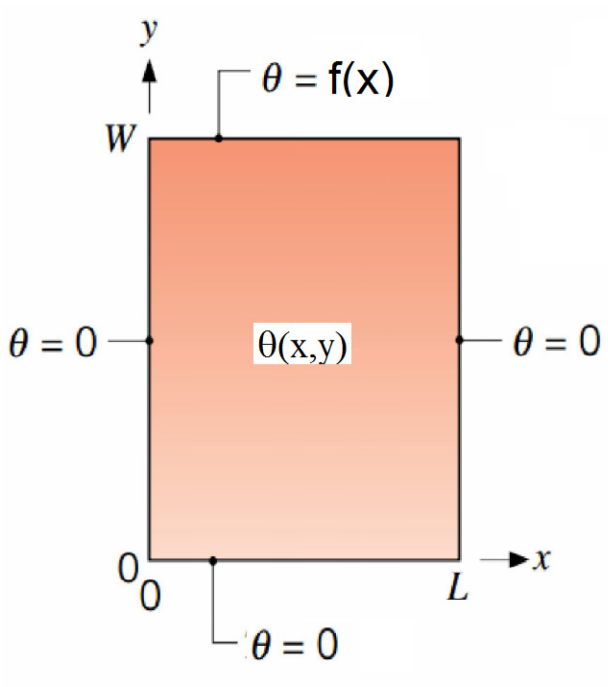
$$u(x, 0) = 1$$

No ponto $u(0, 0)$ existe uma sobreposição das condições (uma diz que deve ser zero e outra diz que deve ser um). Isto gera uma descontinuidade na solução obtida, o que faz com que a expansão em séries de Fourier oscile próximo a este ponto. Este comportamento é conhecido como ***fenômeno de Gibbs***. Esta oscilação não desaparece se mais termos na série forem considerados, porém ocorre um aumento na frequência da oscilação. Cabe destacar que esta oscilação para os instantes iniciais é puramente numérica, não deve-se esperar que este comportamento ocorra de fato em um sistema físico.

6.3 Separação de Variáveis Aplicada à EDP Elípticas

A equação de Laplace é muito aplicada para a modelagem de problemas de difusão estacionários em mais de uma dimensão. Por exemplo, considere uma placa plana onde três fronteiras são mantidas em uma temperatura T_1 e uma fronteira é mantida em uma temperatura $f(x)$. Definindo $\theta = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$, onde T_2 é a temperatura máxima, a distribuição de temperatura $\theta(x, y)$ é dada pela equação:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$



Diferentemente da equação anterior, esta equação não envolve uma condição inicial. Para resolver a equação, é preciso especificar condições para a variável nas quatro fronteiras do sistema. Esta condições podem ser um valor conhecido para a variável, como neste caso (condições de primeira espécie) ou podem envolver a derivada da variável em relação a direção normal à superfície.

Para o caso avaliado, as condições impostas são:

$$\theta(0, y) = 0 \qquad \theta(x, 0) = 0 \qquad \theta(L, y) = 0 \qquad \theta(x, W) = f(x)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, será buscada uma solução da forma:

$$\theta(x,y) = X(x)Y(y)$$

Substituindo na EDP e separando as variáveis:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

Novamente, tem-se uma situação onde $f(x) = g(y)$, o que só pode ser satisfeita se ambas forem iguais a uma constante. Neste caso, será chamada de λ^2 para evitar o uso de $\sqrt{\lambda}$. Além disso, neste caso, caso a constante fosse negativa, a única solução possível seria a trivial.

Com isso, obtém-se dois problemas de autovalor independentes:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$$

Ambas equações de segunda ordem, lineares e homogêneas podem ser facilmente resolvidas utilizando a equação característica. A equação para $X(x)$ irá possuir raízes $r_{1,2} = \pm\lambda i$, de modo que a solução geral será:

$$X(x) = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x)$$

Para a equação para $Y(y)$, as raízes são $r_{1,2} = \pm\lambda$, de modo que a solução é:

$$Y(y) = C_3e^{-\lambda y} + C_4e^{\lambda y}$$

Com isso, a solução geral da EDP é:

$$\theta(x,y) = (C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x))(C_3e^{-\lambda y} + C_4e^{\lambda y})$$

Para determinar a solução particular, é preciso definir as quatro constantes de integração e a forma dos autovalores.

Utilizando a condição $\theta(0,y) = 0$, temos que:

$$\theta(0,y) = (C_1\cos(0) + C_2\sin(0))(C_3e^{-\lambda y} + C_4e^{\lambda y}) = 0$$

$$C_1(C_3e^{-\lambda y} + C_4e^{\lambda y}) = 0$$

Para igualdade só pode ser satisfeita para qualquer valor de y no intervalor se $C_1 = 0$.

Aplicando a condição $\theta(x,0)=0$:

$$\theta(x,0) = C_2\sin(\lambda x)(C_3e^0 + C_4e^0) = C_2\sin(\lambda x)(C_3 + C_4) = 0$$

Uma das maneiras de garantir a igualdade é fazendo C_2, no entanto, isto iria implicar que $X(x)=0$ e portanto seria obtida a solução trivial. Outra maneira de satisfazer a igualdade é impondo que:

$$C_3 = -C_4$$

Dessa forma, até o momento, temos que:

$$X(x) = C_2\sin(\lambda x) \qquad Y(y) = C_4(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) \qquad \rightarrow \qquad \theta(x,y) = C_5\sin(\lambda x)(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$$

Utilizando a terceira condição de contorno homogênea $\theta(L,y)=0$:

$$\theta(L,y) = C_5\sin(\lambda L)(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0$$

Caso a condição $C_5 = 0$ fosse considerada, novamente iríamos recair na solução trivial. No entanto, o problema também admite solução para os casos onde:

$$\sin(\lambda L) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Dessa forma, a solução será da forma:

$$\theta(x,y) = C_n\sin(\frac{n\pi x}{L})(e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L})$$

onde a constante C_5 foi substituída por C_n pois irá depender do valor de n.

Para simplificar a expressão obtida, pode-se considerar que:

$$e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L} = 2\sinh(n\pi y/L)$$

Assim, juntando a constante 2 com as constantes C_n:

$$\theta(x,y) = C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

Novamente, considerando o princípio de superposição, a solução geral será a combinação linear das soluções para cada valor de n:

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

Para determinar as constantes C_n, pode-se utilizar a condição de contorno $\theta(x,W)=f(x)$:

$$\theta(x,W) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi W}{L}$$

Considerando a expressão obtida anteriormente para a expansão em Fourier em séries de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Reconhecendo que

$$b_n = C_n \sinh \frac{n\pi W}{L}$$

os coeficientes são dados por:

$$b_n = C_n \sinh \frac{n\pi W}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Desse modo, a solução para o problema pode ser expressa como:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

Por exemplo, considere o caso onde a fronteira superior é mantida em T_2, de modo que $f(x) = 1$ ao longo de toda a fronteira. Com isso, pode-se avaliar a integral:

$$\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$= -\frac{L}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

Assim, a solução para este caso seria:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(n\pi))}{n} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

Como n é um inteiro positivo:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^{n+1} + 1)}{n} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

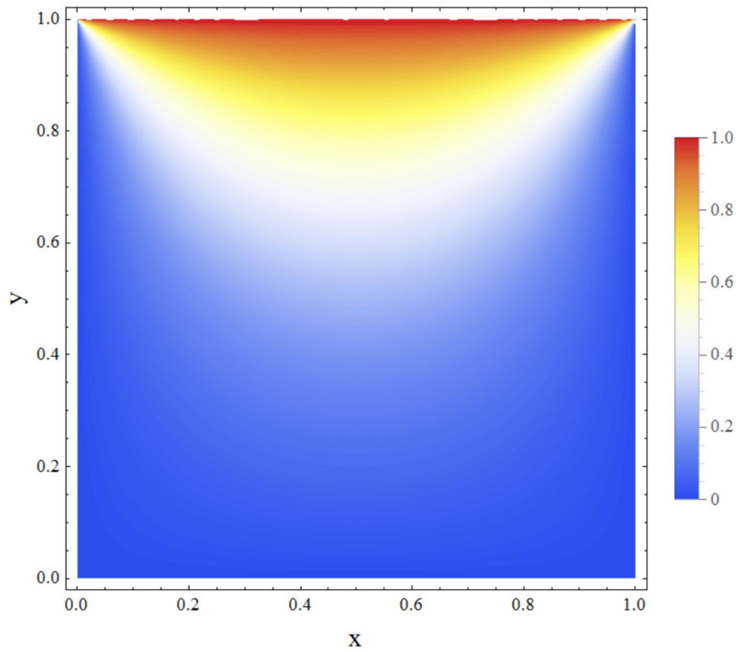
Considerando $W = L = 1$ e avaliando os primeiros 500 termos da série, obtém-se o perfil de temperatura apresentado a seguir.

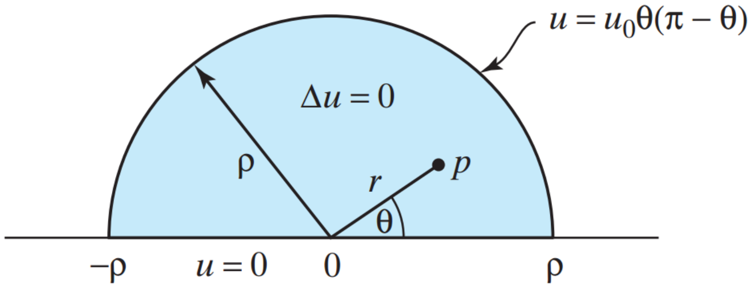
6.3.1 Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas

Exemplo 01: Determine a distribuição de temperatura em uma região semicircular com raio ρ posicionada sobre uma superfície plana, como representado na figura a seguir:

A equação que descreve a variação na temperatura neste caso é a equação de Laplace, porém deve-se avaliar a equação em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$





Como condições de contorno, pode-se considerar que a superfície plana é mantida em uma temperatura $u = 0$ e a temperatura na superfície semi-circular é dada por $u = u_0\theta(\pi - \theta)$.

Lista de Exercícios 06 - Método de Separação de Variáveis

1) ***(Equação do Calor)*** Considere a seguinte equação diferencial parcial com as condições de contorno e inicial associadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

Encontre a solução $u(x,t)$ para para o caso onde $f(x) = sen(x)$.

2) Considere uma barra homogênea com comprimento de $L = 50\,cm$ que está inicialmente a uma temperatura de $100°C$. Esta barra possui sua superfície lateral isolada, de modo que troca calor somente pelas extremidades. Se esta barra for mergulhada em um banho a $0°C$, determine a temperatura em seu ponto médio após 30 minutos (1800 s), supondo que (a) a barra é feita de um material isolante, com $\alpha = 0.025\,cm^2/s$ e (b) a barra é feita de um metal, com $\alpha = 0.35\,cm^2/s$. Considere que a equação que descreve a variação da temperatura ao longo do tempo e da posição x é:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

e que as condições de contorno e inicial associada são:

$$\theta(0,t) = 0 \qquad \theta(50,t) = 0 \qquad \theta(x,0) = 100$$

R: (a) $T = 98.32°C$, (b) $T = 10.59°C$

3) ***(Equação da Onda)*** Considere uma corda elástica de comprimento L esticada entre dois suportes em um plano horizontal. O deslocamento vertical $u(x,t)$ da corda em um ponto x no instante t é dador por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde a^2 é uma constante que depende do material.

(a) Mostre que esta equação pode ser separada em duas EDO's do tipo:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad T'' + a^2\lambda T = 0$$

(b) Utilizando o método de separação de variáveis, mostre que a solução geral deste problema é:

$$u(x,t) = (c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin\sqrt{\lambda}x)(c_3\cos(a\sqrt{\lambda}t) + c_4\sin a\sqrt{\lambda}t)$$

(c) Considere que a corda esteja fixa em $x = 0$ e $x = L$, de modo que:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$$

Além disso, assuma que a velocidade inicial da corda é nula, de modo que a derivada de $u(x,t)$ em relação a t em $t=0$ é zero. Considere também que a posição inicial da corda é dada por uma função $f(x)$, de forma que:

$$u(x,0) = f(x)$$

Utilizando as condições fornecidas, mostre que os problema só irá possuir soluções não-triviais para os autovalores:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

(d) Mostre que a solução particular será da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi at}{L}$$

onde os coeficientes são dados por:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

4) ***(Equação de Laplace)*** Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$u(0,y) = 0 \qquad\qquad u(a,y) = 0 \qquad\qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = h(x) \qquad\qquad u(x,b) = 0 \qquad\qquad 0 \leq x \leq a$$

R: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{a}\int_0^a h(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx(e^{n\pi(y-2b)/a} - e^{-n\pi y/a})$

Bibliografia

[1] Boyce, W. E.; Di Prima, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno, 10ª ed., LTC, Rio de Janeiro: 2015;

[2] Dyke, Phil. An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, 2nd ed., Springer, London: 2014;

[3] Greenberg, M. D. Advanced Engineering Mathematics, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey: 1998;

[4] Gwaiz, M. A. Al. Sturm-Liouville Theory and its Applications, Springer, London: 2018;

[5] Jeffrey, A. Advanced Engineering Mathematics, Harcourt Academic Press, 2002;

[6] Kreyszig, E. Advanced Engineering Mathematics, 10th ed., John Wiley and Sons, 2011.