Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química II

Lista de Exercícios 09 - Métodos Numéricos para Problemas de Valor de Contorno

Prof. Éliton Fontana

01) Em conforto térmico, é frequentemente analisada a perda de calor através de um determinado corpo, que é dada pela variação da temperatura T através da seguinte expressão:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - h(T_{ext} - T) = 0$$

Considere o caso de um casaco com espessura $L = 1.5cm$ onde $h = 0.13\,cm^{-2}$. Na região interior, em contato com o usuário, a temperatura é de $T_0 = 28°C$, enquanto que a temperatura na região exterior é de $T_{ext} = -5°C$. Pode-se assumir também que a temperatura na superfície externa do casaco (em $x = L$) é igual a temperatura externa. Utilizando o método de diferenças finitas, determine a temperatura em $x = 0.5\,cm$ e em $x = 1\,cm$, considerando $\Delta x = 0.25\,cm$.

R: $T[0.5] = 17.61°C$, $T[1] = 6.49°C$

02) A seguinte equação pode ser utilizada para descrever a variação na temperatura ao longo do raio r de uma barra circular com fonte interna de calor, como por exemplo um fio metálico por onde passa uma corrente elétrica:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + S = 0$$

Esta equação esta expressa em uma forma adimensional, de modo que nenhuma das variáveis possui unidade. A superfície externa da barra corresponde a $r = 1$ e o ponto central corresponde a $r = 0$. Como condições de contorno, temos que:

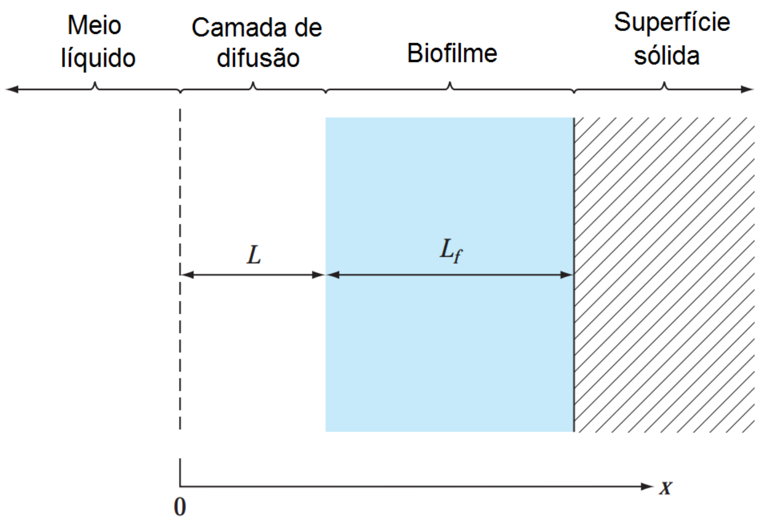
$$T = 1 \qquad \text{em} \qquad r = 1$$

$$\frac{dT}{dr} = 0 \qquad \text{em} \qquad r = 0$$

Isto significa que a temperatura na superfície externa é mantida constante e que o fluxo de calor é simétrico. Considerando que $S = 10$, utilize o método de diferenças finitas com $\Delta r = 0.2$ para obter a variação na temperatura ao longo do raio. *Obs.:* A variável independente r que aparece de forma explícita na EDO também deve ser discretizada.

R: $T_0 = T_1 = 3.23$, $T_2 = 3.055$, $T_3 = 2.575$, $T_4 = 1.889$, $T_5 = 1$

03) Um biofilme com espessura L_f cresce sobre uma superfície sólida, como indicado na figura a seguir. Sobre a superfície do biofilme, existe uma camada com espessura L por onde difunde um determinado composto A, que ao entrar no biofilme é sujeito a uma reação irreversível de primeira ordem que converte o composto A em um composto B.



As equações de balanço de massa em estado estacionário que descrevem a variação na concentração de A ao longo da camada de difusão e do biofilme são as seguintes:

$$D\frac{d^2C_A}{dx^2} = 0 \qquad 0 \leq x < L$$

$$D_f\frac{d^2C_A}{dx^2} - kC_A = 0 \qquad L \leq x \leq L + L_f$$

onde $D = 0.8\,cm^2/s$ é o coeficiente de difusão na camada de difusão, $D_f = 0.064\,cm^2/s$ é o coeficiente de difusão no biofilme e $k = 100\,s^{-1}$ é a taxa para a reação de conversão de A em B. Como condições de contorno, pode-se assumir que a concentração do composto A é constante no meio líquido ($x = 0$) de modo que:

$$C_A = C_{A,0} \qquad x = 0$$

A superfície sólida pode ser considerada impermeável, de modo que a seguinte condição é satisfeita:

$$\frac{dC_A}{dx} = 0 \qquad x = L + L_f$$

Considerando que $L = 0.004\,cm$, $L_f = 0.008\,cm$ e $C_{A,0} = 0.1\,mol/cm^3$, utilize o método de diferenças finitas com $\Delta x = 0.001$ para obter a distribuição do composto A ao longo da camada de difusão e do biofilme. Pode-se assumir que a resistência a transferência de massa na interface biofilme/camada de difusão é desprezível, de modo que a concentração nos dois lados da interface é a mesma.

R: Concentração na interface com a superfície sólida: $C_A(L + L_f) = 0.0913\, mol/cm^3$