Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química II

Lista de Exercícios 12 - Diferenças Finitas para EDP's Parabólicas

Prof. Éliton Fontana

1) ***(Equação do Calor)*** Uma das equações mais importantes para a engenharia é a equação do calor, definida de forma geral como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde α é uma constante representando o coeficiente de difusão. Esta equação é utilizada para descrever processos transientes unidirecionais (não somente de calor). Considere as seguintes condições de contorno:

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(1,t) = 0$$

e a seguinte condição inicial:

$$u(x,0) = 1$$

a) Considerando uma malha com $\Delta x = 0.2$ e $\alpha = 0.5$, determine o passo de tempo máximo que pode ser utilizado para garantir a estabilidade da solução com o uso de uma formulação explícita;

R: $\Delta t \leq 0.04$

b) Utilizando o método explícito, determine o valor de u em $x = 0.6$ e $x = 0.8$ para os três primeiros passos de tempo, considerando o valor de Δt obtido no item anterior;

R: $t = \Delta t$: $u(0.6) = 1$, $u(0.8) = 0.5$; $t = 2\Delta t$: $u(0.6) = 0.75$, $u(0.8) = 0.5$; $t = 3\Delta t$: $u(0.6) = 0.625$, $u(0.8) = 0.375$

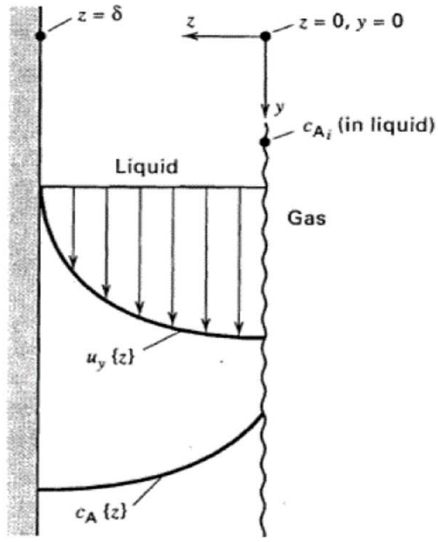
c) Determine u em $x = 0.6$ e $x = 0.8$ para os três primeiros passos de tempo utilizando uma formulação implícita. Considere o mesmo passo de tempo adotado no item b.

R: $t = \Delta t$: $u(0.6) = 0.909$, $u(0.8) = 0.727$; $t = 2\Delta t$: $u(0.6) = 0.7934$, $u(0.8) = 0.562$; $t = 3\Delta t$: $u(0.6) = 0.679$, $u(0.8) = 0.451$

2) ***(Transferência de Massa em um Filme Descendente)*** Muitos processos de interesse na engenharia química envolvem o transporte através de filmes líquidos que se formam sobre superfícies verticais. Considere, por exemplo, um caso onde uma espécie química A é absorvida pelo meio líquido, conforme ilustrado na figura a seguir.

A variação na concentração da espécie A ao longo de y e z é dada por:

$$u_y(z)\frac{\partial C_A}{\partial y} = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$$



Mesmo não envolvendo uma derivada temporal, esta equação é uma EDP parabólica, pois existe um caminho característico associado à direção y (a informação viaja de cima para baixo).

Através da aplicação das equações de Navier-Stokes, pode-se mostrar que no regime laminar o perfil de velocidade é dado por:

$$u_y(z) = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}\left(1 - \frac{z^2}{\delta^2}\right)$$

Como as propriedades físicas e a espessura do filme δ são constantes, pode-se ainda expressar o perfil como:

$$u_y(z) = k_1\left(1 - \frac{z^2}{\delta^2}\right)$$

Como condições de contorno, pode-se considerar que em $y = 0$ o líquido está isento do composto A, de modo que:

$$C_A(0, z) = 0$$

Na interface com o gás, pode-se assumir uma relação de equilíbrio:

$$C_A(y, 0) = C_{Ae}$$

Além disso, pode-se também considerar que a parede é impermeável, resultando em uma condição de derivada nula em relação a z:

$$\frac{\partial C_A}{\partial z}(y, \delta) = 0$$

Com base nestas informações, utilize o método de diferenças finitas com formulação explícita para discretizar a equação para C_A, ou seja, obtenha as equações algébricas que descrevem a concentração ao longo do sistema.