

Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química II

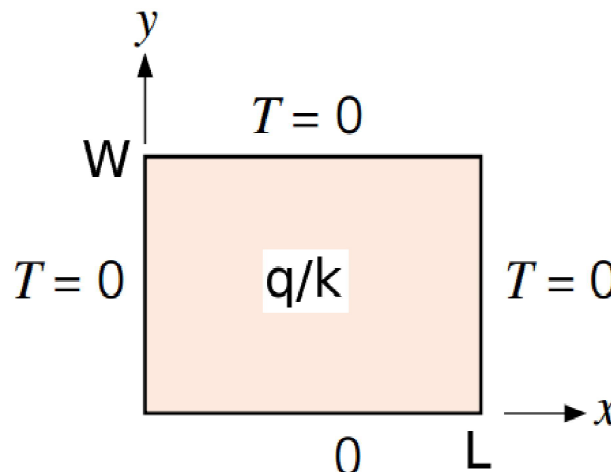
Lista de Exercícios 11 - Diferenças Finitas para EDP's Elípticas

Prof. Éliton Fontana

1) (*Equação de Poisson*) Considere um sistema bidimensional, como na Figura a seguir, representando um meio sólido com condutividade térmica constante onde existe uma fonte uniforme de calor $\dot{q}/k$ e as fronteiras são mantidas em $T = 0^\circ C$. Neste caso, a equação que descreve a variação de temperatura ao longo das direções x e y , em estado estacionário, é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\dot{q}}{k}$$

As equações com este formato são chamadas de equação de Poisson e são uma importante classe de equações elípticas.

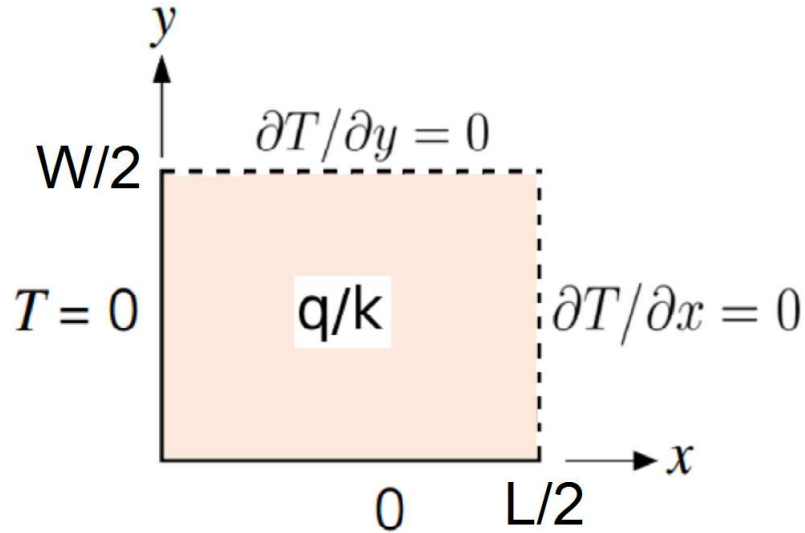


Considere um sistema onde $L = W = 1\text{ cm}$ e $\dot{q}/k = 1.5 \times 10^3 K/cm^2$ correspondendo, por exemplo, a um microchip onde ocorre dissipação de calor devido à passagem de uma corrente elétrica. Utilizando uma malha com $N_i = N_j = 5$, obtenha a temperatura no centro do microchip. Se necessário, interpole os valores dos pontos vizinhos ao ponto central.

R: $T = 67.5^\circ C$

2) (*Utilização de Planos de Simetria*) Considere novamente o sistema descrito no exemplo anterior. Como as condições de contorno impostas são iguais em todas as fronteiras e a fonte de calor é homogênea, os planos paralelos aos eixos x e y e que cruzam o ponto central representam *planos de simetria*. Isto implica que é suficiente

considerar somente 1/4 do domínio de solução, já que o comportamento neste quadrante será idêntico ao comportamento nos demais¹. A condição matemática que representa os planos simetrias é de derivada nula em relação à direção normal. Dessa forma, o problema anterior pode ser representado da forma:



a) Utilizando novamente $N_i = N_j = 5$, obtenha a temperatura no ponto central. Observe que neste caso o ponto central corresponde exatamente ao vértice $T[N_i, N_j]$.

R: $T = 51.465^\circ C$

¹Alguns sistemas podem apresentar quebra de simetria devido à flutuações infinitesimais próximas a pontos de bifurcação, mas este comportamento é raro e usualmente não precisa ser considerado.