Análise de Estabilidade com o Método de Von Neumann

A diferença entre a solução exata da EDP (C_A^*) e a solução encontrada com o método numérico (C_A^N) pode ser expressa como:

$$\epsilon[i,j] = C_A^N[i,j] - C_A^*[i,j]$$

Esta variável representa o erro de discretização do modelo. Substituindo a expressão para a solução numérica na equação:

$$C_A^*[i,j+1] + \varepsilon[i,j+1] = C_A^*[i,j] + \varepsilon[i,j] +$$

$$Fo_M\left(C_A^*[i+1,j] + \varepsilon[i+1,j] - 2C_A^*[i,j] - 2\varepsilon[i,j] + C_A^*[i+1,j] + \varepsilon[i+1,j]\right)$$

- Considerando que a discretização seja consistente, a solução exata deve satisfazer a equação discretizada. Por isso, a equação pode ser simplificada para:

$$\varepsilon[i,j+1] = \varepsilon[i,j] + Fo_M\left(\varepsilon[i+1,j] - 2\varepsilon[i,j] + \varepsilon[i+1,j]\right)$$

Esta equação pode ser utilizada para estimar o erro em cada ponto. O método de Von Neumann considera que o erro pode ser expresso em termos de uma expansão em séries de Fourier:

$$\varepsilon(x,t) = \sum_{m=1}^{M} e^{at} e^{ikx}$$

onde a é uma constante, $k=\pi m/L$ é o número de onda e $M=L/\Delta x$, sendo L a comprimento total em x.

- Como a equação para o erro é linear, pode-se substituir qualquer um dos termos da série na equação. Isto implica que o comportamento de cada componente da série é o mesmo que da série como um todo. Assim, pode-se considerar:

$$\varepsilon(x,t) = e^{at} e^{ikx}$$

- Relacionando com a forma discretizada da equação:

$$\varepsilon[i,j] = e^{at} e^{ikx} \qquad \varepsilon[i-1,j] = e^{at} e^{ik(x-\Delta x)}$$

$$\varepsilon[i+1,j] = e^{at} e^{ik(x+\Delta x)} \qquad \varepsilon[i,j+1] = e^{a(t+\Delta t)} e^{ikx}$$

- Substituindo na equação para o erro:

$$e^{a(t+\Delta t)} e^{ikx} = e^{at} e^{ikx} + Fo_M\left(e^{at} e^{ik(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ikx} + e^{at} e^{ik(x-\Delta x)}\right)$$

- Dividindo todos os termos por $e^{at}e^{ikx}$:

$$e^{a\Delta t} = 1 + Fo_M\left(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - 2\right)$$

- Utilizando a identidade de Euler (e^{ix}= cos(x) + i sin(x)) e levando em conta que sin(x) = - sin(-x) e cos(x) = cos(-x):

$$e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} = 2\cos(k\Delta x)$$

- Além disso, para facilitar, pode-se utilizar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \rightarrow \qquad 2\cos(2\theta) = 4\sin^2\theta + 2$$

- Substituindo na equação para o erro, chega-se a:

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4Fo_M \sin^2(k\Delta x/2)$$

- Para que a solução seja ***estável*** ao longo das iterações no tempo, é necessário que o erro diminua a cada nova iteração. Ou seja:

$$\lambda = \left|\frac{\varepsilon[i, j+1]}{\varepsilon[i, j]}\right| \leq 1$$

onde λ é chamado de fator de amplificação do erro. Utilizando a definição em termos da série de Fourier:

$$\lambda = \frac{e^{a(t+\Delta t)}e^{ik\Delta x}}{e^{a(t)}e^{ik\Delta x}} = e^{a\Delta t}$$

- Assim, utilizando a expressa obtida anteriormente para $e^{a\Delta t}$:

$$\left|1 - 4Fo_M \sin^2(k\Delta x/2)\right| \leq 1$$

- Como o termo envolvendo $\sin^2$ é sempre positivo:

$$4Fo_M \sin^2(k\Delta x/2) \leq 2$$

- Além disso como $\sin^2(x)$ está limitado no intervalo [0,1], esta desigualdade será satisfeita para qualquer valor de k se e somente se:

$$Fo_M \leq \frac{1}{2}$$