

# Aula 12 - Método de Diferenças Finitas para EDP's Parabólicas

Éliton Fontana

Como visto em aulas anteriores, as equações parabólicas possuem uma separação entre o domínio de influência e o domínio de dependência dos pontos. A principal categoria de equações parabólicas são as relacionadas com a equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$$

Sendo que esta equação governa a variação de um potencial  $u$  ao longo do tempo e das direções espaciais.

Para equações parabólicas, a separação entre os domínios de influência e de dependência possibilita o uso de métodos de marcha para avaliar a solução a partir de uma condição inicial até um ponto final que não precisa ser previamente definido, ou seja, pode-se construir o domínio discretizado conforme se avança na solução.

## 1 Equação do Calor Unidimensional

Para ilustrar a aplicação do método de diferenças finitas para a discretização de equações parabólicas, será considerado a equação do calor unidimensional por simplicidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Neste caso, assim como para a equação de Laplace vista anteriormente, o domínio de solução também possui duas dimensões, de modo que a variável discretizada será identificada como  $u[i, m] = u_{i,m}$  onde  $i$  representa a direção  $x$  e  $m$  o tempo. A solução da EDP neste caso será da forma  $u(x, t)$ , enquanto que sua aproximação discreta será da forma  $u_{i,m}$ .

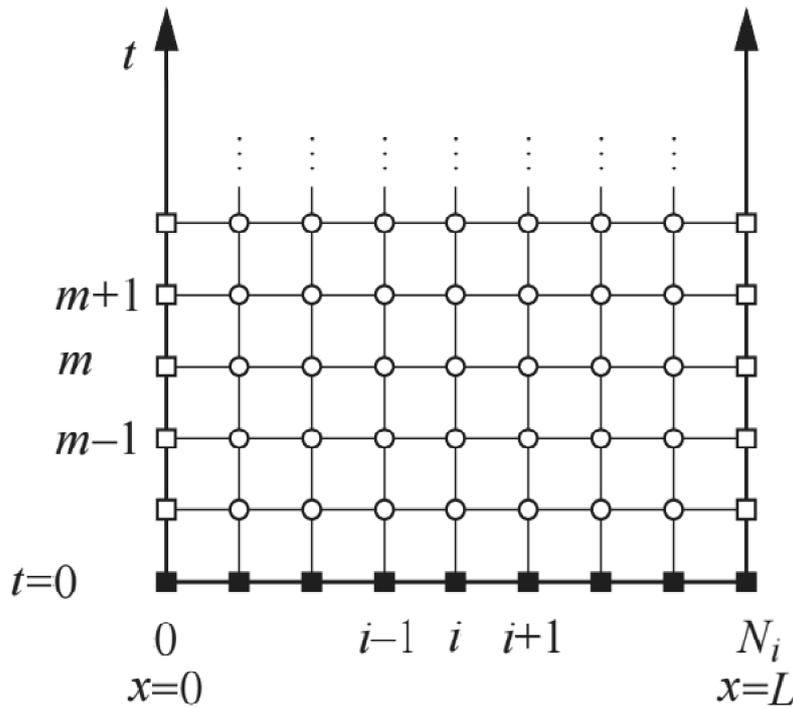
Para resolver esta equação, é necessário especificar duas condições de contorno em  $x$  e uma condição inicial no tempo. Por exemplo, considere que as extremidades  $x = 0$  e  $x = L$  sejam mantidas em uma condição tal que  $u = 0$  para todo o tempo.

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$$

Além disso, considere que inicialmente o sistema esteja mantido em uma condição  $u = 1$  ao longo de toda a direção  $x$ :

$$u(x, 0) = 1$$

Uma das principais diferenças em relação às equações elípticas é que no caso das parabólicas o domínio de solução é aberto em uma das direções, no exemplo anterior em relação ao tempo. Isto implica que não é necessário conhecer condições em um valor final de tempo para resolver a equação. Na figura a seguir é representado um exemplo de grid numérico associado a uma equação parabólica.



O grid neste caso possui  $N_i$  elementos na direção  $x$ , ou seja, esta direção já está totalmente definida. Na direção  $t$ , pode-se continuar avaliando o sistema conforme for necessário. Neste caso, é comum dizer que cada valor  $m$  corresponde a um *nível de tempo* distinto. Por exemplo,  $u_{2,4}$  representa uma aproximação para a solução no ponto  $i = 2$  no nível de tempo  $m = 4$ . Em termos do domínio contínuo, isto representa uma aproximação na posição  $x = 2\Delta x$  e no tempo  $t = 4\Delta t$ .

Para aplicar o método de diferença finitas nesta equação, deve-se discretizar a derivada espacial, assim como realizado para a equação de Laplace, e a derivada temporal, como será apresentado a seguir

## 1.1 Discretização das Derivadas Temporal e Espacial

A existência de um caminho preferencial nas EDP's parabólicas facilita a sua análise numérica, pois para determinar a solução em um dado ponto  $u_{i,m}$  basta considerar o seu domínio de dependência. Analisando em termos físicos, isto significa que não é preciso avaliar um nível de tempo  $m+1$  (futuro) para determinar a solução em um nível de tempo  $m$  (presente). Assim, para avaliar a derivada primeira em uma posição  $i$  e em um nível  $m$ , deve-se utilizar um esquema para trás, de forma que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u[i, m] - u[i, m - 1]}{\Delta t}$$

Para a discretização da derivada espacial em  $x$ , como comentado anteriormente, considera-se as demais variáveis independentes constantes. Neste caso, existem duas possibilidades para a discretização: manter o tempo constante no nível  $m$  ou no nível  $m - 1$ . Cada uma das possibilidades possui suas vantagens e desvantagens. A avaliação no nível  $m - 1$  é conhecida como *formulação explícita*, e utilizando um esquema central resulta em:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u[i - 1, m - 1] - 2u[i, m - 1] + u[i + 1, m - 1]}{\Delta x^2}$$

De forma equivalente, a formulação baseada no nível  $m$  é conhecida como *formulação implícita*, e resulta em:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u[i - 1, m] - 2u[i, m] + u[i + 1, m]}{\Delta x^2}$$

Pode-se observar que se a derivada segunda for substituída por uma função  $f(t, y)$  qualquer, a formulação explícita é equivalente ao método de Euler explícito e a formulação implícita ao método de Euler implícito. A principal vantagem do método explícito é sua facilidade de implementação, pois pode-se partir da condição inicial definida no nível  $m = 0$  para avaliar de forma explícita todos os pontos no nível  $m = 1$  e continuar com este processo até atingir o tempo final desejado. Já a formulação implícita requer a resolução de um conjunto de equações algébricas para cada nível de tempo. No entanto, assim como para o método de Euler, a formulação explícita possui sérios problemas de estabilidade,

sendo em muitos casos necessário o uso de passos de tempo muito pequenos, enquanto que a formulação implícita é automaticamente estável. A seguir serão apresentados mais detalhes sobre as duas possíveis formulações.

## 2 Método Explícito

Utilizando a formulação explícita, a equação do calor unidimensional pode ser expressa na forma discretizada como:

$$\frac{u[i, m] - u[i, m - 1]}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{u[i - 1, m - 1] - 2u[i, m - 1] + u[i + 1, m - 1]}{\Delta x^2} \right)$$

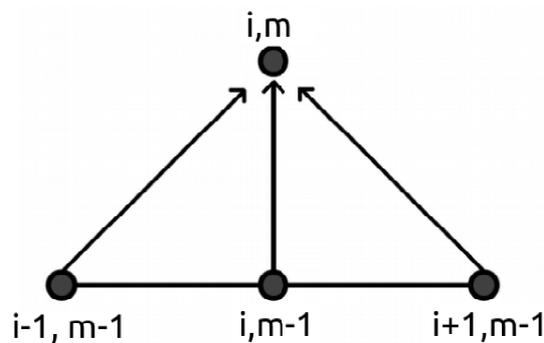
Como pode ser visto, esta equação possui somente um termo avaliado no nível de tempo  $m$ . Definindo o seguinte parâmetro adimensional, conhecido como *número de Fourier*:

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

A equação anterior pode ser escrita como:

$$u[i, m] = u[i, m - 1] + Fo(u[i - 1, m - 1] - 2u[i, m - 1] + u[i + 1, m - 1])$$

Assim, o termo  $Fo(u[i - 1, m - 1] - 2u[i, m - 1] + u[i + 1, m - 1])$  pode ser visto como uma correção para o valor no ponto  $i$  devido a uma passagem de tempo  $\Delta t$ . Desta forma, os valores para um novo nível de tempo  $m$  podem ser obtido somente com base nos valores do passo anterior (já conhecidos), de forma que este procedimento é um método de marcha no tempo (não é necessário convergir no passo atual para avançar para o próximo). Este comportamento é ilustrado na figura a seguir:



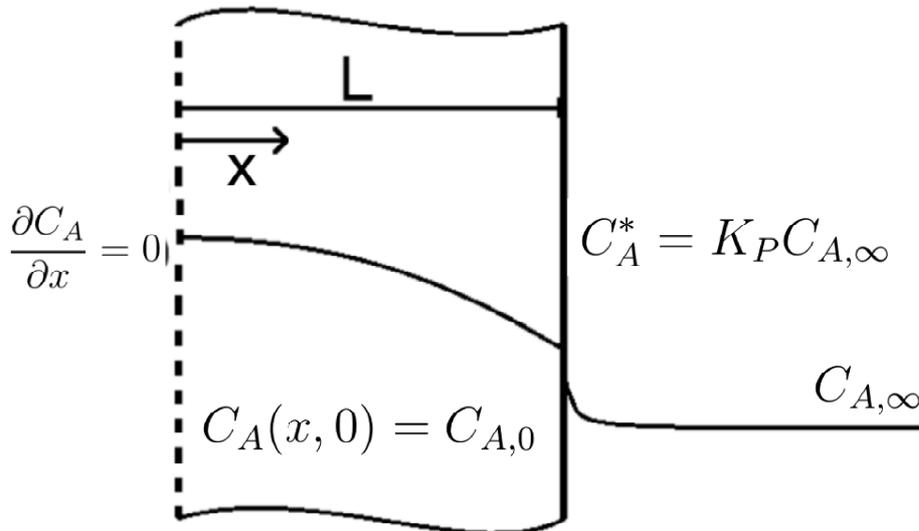
Conforme comentado anteriormente, o principal problema com a formulação explícita é a dificuldade em garantir a estabilidade. Para analisar a estabilidade desta formulação

pode-se utilizar um método chamado de *método de von Neumann*. A obtenção do critério de estabilidade não será apresentada aqui por brevidade, porém pode-se mostrar que o método será estável somente se:

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$$

ou seja, deve-se utilizar valores de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  que garantam que esta condição seja satisfeita. Da mesma forma que os critérios utilizados para manter a estabilidade do método de Euler, esta condição não garante que a precisão desejada será atingida, garante somente que os erros de arredondamento não serão amplificados ao longo da solução. De fato, a redução no valor de  $\Delta x$  irá aumentar o número de Fourier e como consequência prejudicar a estabilidade. Porém como a aproximação por diferenças finitas é baseada em um truncamento da série de Taylor, a redução em  $\Delta x$  reduz os erros de truncamento. A estratégia que costuma ser aplicada neste caso é determinar o  $\Delta x$  tal que os erros de truncamento sejam suficientemente baixos e com base neste valor determinar qual o passo de tempo que pode ser utilizado para garantir a estabilidade.

Para ilustrar a aplicação do método explícito, considere um caso onde deseja-se remover uma dada espécie química  $A$  do interior de um meio poroso até o meio externo, como por exemplo em um processo de extração sólido-líquido ou processo de sacagem, como ilustrado na figura a seguir:



Mediante alguns hipóteses simples, a equação que descreve a transferência de massa da espécie  $A$  é dada por:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

onde  $D_A$  é o coeficiente de difusão e  $C_A$  a concentração da espécie  $A$ . A solução neste caso será da forma  $C_A(x, t)$ . Como condições de contorno, temos que:

$$C_A(L, t) = K_p C_{A,\infty} = C_A^*$$

$$\left. \frac{\partial C_A}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Como condição inicial, será considerado que o sistema está com uma concentração constante:

$$C_A(x, 0) = C_{A,0}$$

Para facilitar a resolução deste problema, pode-se definir uma variável adimensional da forma:

$$u = \frac{C_A - C_A^*}{C_{A,0} - C_A^*}$$

de forma que a equação governante, as condições de contorno e a condição inicial podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(L, t) = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad u(x, 0) = 1$$

A discretização da equação governante através do método de diferenças finitas explícito resulta em:

$$u[i, m] = u[i, m-1] + Fo(u[i-1, m-1] - 2u[i, m-1] + u[i+1, m-1])$$

ou em notação compacta:

$$u_{i,m} = u_{i,m-1} + Fo(u_{i-1,m-1} - 2u_{i,m-1} + u_{i+1,m-1})$$

onde neste caso  $Fo = D_A \Delta t / \Delta x^2$ . Como a difusividade é uma propriedade física do sistema, este é um valor fixo e previamente conhecido. Assim, é necessário definir dois parâmetros, por exemplo  $\Delta x$  e  $Fo$ , de modo que  $\Delta t$  pode ser calculado.

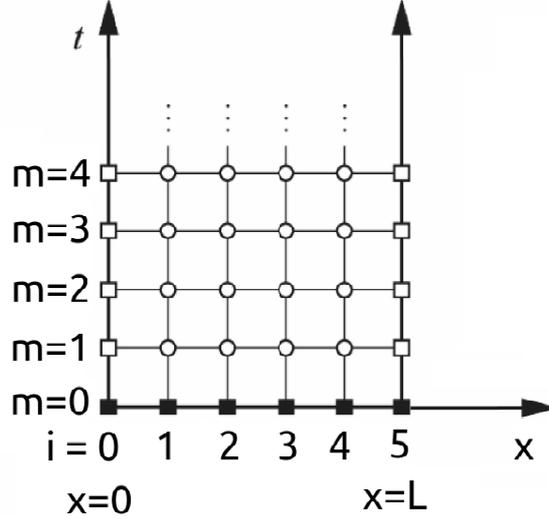
Por exemplo, considere um caso onde  $L = 1 \text{ mm}$  e  $\Delta x = 0.2$ , de modo que  $N_i = L/\Delta x = 5$ . O valor de  $\Delta t$  deve ser pequeno o suficiente para garantir a estabilidade. O critério para estabilidade é  $Fo < 0.5$ , porém é recomendável utilizar um valor relativamente menor. Neste caso, será considerado que  $Fo < 0.25$ , de modo que o passo de tempo será:

$$\Delta t = \frac{Fo \Delta x^2}{D_A}$$

Por exemplo, pode-se considerar que um valor razoável para  $D_A$  é  $0.01 \text{ mm}^2/\text{s}$ , de modo que:

$$\Delta t = \frac{(0.25)(0.2)^2}{0.01} = 1 \text{ s}$$

Considerando que  $N_i = 5$ , o grid numérico será da forma como apresentado na figura seguir.



Para iniciar o processo de aproximação da solução, pode-se primeiramente definir as condições de contorno e a condição inicial. Novamente, nos vértices do grid existe uma sobreposição de condições, pois as condições de contorno indicam que  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  para qualquer  $t$  e a condição inicial indica que  $u(x, 0) = 1$  para qualquer  $x$ . Neste caso será considerado que a condição inicial seja satisfeita nos vértices, de modo que para o nível de tempo  $m = 0$  (condição inicial), temos que:

$$u_{0,0} = u_{1,0} = u_{2,0} = u_{3,0} = u_{4,0} = u_{5,0} = 1$$

Com base nestes valores, pode-se determinar o próximo nível de tempo,  $m = 1$ . Primeiramente, pode-se definir as condições de contorno. Na extremidade  $x = L$ , a condição de primeira espécie pode ser expressa na forma discreta como:

$$u(L, t) = 0 \quad \rightarrow \quad u_{5,m} = 0 \quad m \geq 1$$

sendo esta condição válida para qualquer nível de tempo além do inicial. De forma semelhante, a condição de segunda espécie na fronteira  $x = 0$  implica que:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{0,m} = u_{1,m} \quad m \geq 1$$

Assim, resta avaliar os pontos internos ( $i = 1$  até  $i = 4$ ). Por exemplo, para  $i = 1$  temos que:

$$u_{1,1} = u_{1,0} + Fo(u_{0,0} - 2u_{1,0} + u_{2,0}) = 1 + 0.25(1 - 2 + 1) = 1$$

De forma semelhante, para os demais pontos:

$$u_{2,1} = u_{2,0} + Fo(u_{1,0} - 2u_{2,0} + u_{3,0}) = 1 + 0.25(1 - 2 + 1) = 1$$

$$u_{3,1} = u_{3,0} + Fo(u_{2,0} - 2u_{3,0} + u_{4,0}) = 1 + 0.25(1 - 2 + 1) = 1$$

$$u_{4,1} = u_{4,0} + Fo(u_{3,0} - 2u_{4,0} + u_{5,0}) = 1 + 0.25(1 - 2 + 1) = 1$$

Como pode ser visto, somente o ponto associado a condição de contorno em  $x = L$  foi alterado. Resumindo:

$$u_{0,1} = u_{1,1} = u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = 1 \quad u_{5,1} = 0$$

Esta característica é comum dos métodos de diferenças finitas explícito. No próximo nível de tempo,  $m = 2$ , somente os valores em  $i = 5$  e  $i = 4$  serão diferentes dos valores iniciais, ou seja, para cada nível de tempo somente um ponto adicional é afetado pela condição de contorno. Neste caso, os valores nestes pontos serão:

$$u_{5,2} = 0$$

$$u_{4,2} = u_{4,1} + Fo(u_{3,1} - 2u_{4,1} + u_{5,1}) = 1 + 0.25(1 - 2 + 0) = 0.75$$

De modo que:

$$u_{0,2} = u_{1,2} = u_{2,2} = u_{3,2} = 1 \quad u_{4,2} = 0.75 \quad u_{5,2} = 0$$

De forma semelhante, para o próximo nível de tempo somente os valores associados a  $i = 3$ ,  $i = 4$  e  $i = 5$  serão diferentes da condição inicial:

$$u_{5,3} = 0$$

$$u_{4,3} = u_{4,2} + Fo(u_{3,2} - 2u_{4,2} + u_{5,2}) = 0.75 + 0.25(1 - 2(0.75) + 0) = 0.625$$

$$u_{3,3} = u_{3,2} + Fo(u_{2,2} - 2u_{3,2} + u_{4,2}) = 1 + 0.25(1 - 2 + 0.75) = 0.9375$$

Assim:

$$u_{0,3} = u_{1,3} = u_{2,3} = 1 \quad u_{3,3} = 0.9375 \quad u_{4,3} = 0.625 \quad u_{5,3} = 0$$

Para  $m = 4$ , obtêm-se:

$$u_{5,4} = 0$$

$$u_{4,4} = u_{4,3} + Fo(u_{3,3} - 2u_{4,3} + u_{5,3}) = 0.625 + 0.25(0.9375 - 2(0.625) + 0) = 0.54687$$

$$u_{3,4} = u_{3,3} + Fo(u_{2,3} - 2u_{3,3} + u_{4,3}) = 0.9375 + 0.25(1 - 2(0.9375) + 0.625) = 0.875$$

$$u_{2,4} = u_{2,3} + Fo(u_{1,3} - 2u_{2,3} + u_{3,3}) = 1 + 0.25(1 - 2 + 0.9375) = 0.9844$$

Assim:

$$u_{0,4} = u_{1,4} = 1 \quad u_{2,4} = 0.9844 \quad u_{3,4} = 0.875 \quad u_{4,4} = 0.54687 \quad u_{5,1} = 0$$

Pode-se continuar com este procedimento até atingir o tempo final desejado.

### 3 Método Implícito

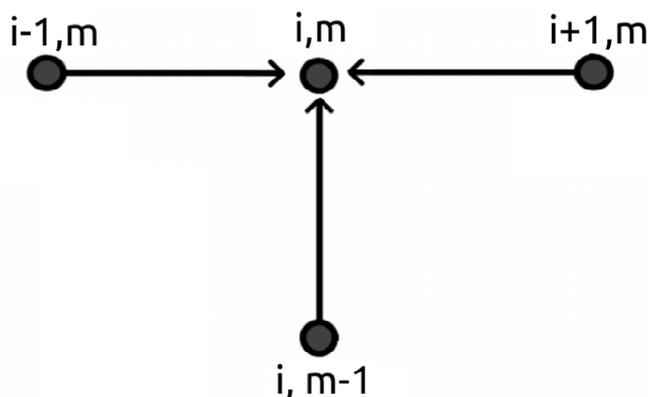
Na formulação implícita, a derivada espacial é avaliada no mesmo nível de tempo onde o ponto está sendo avaliado. Com isso, a equação do calor unidimensional é discretizada como:

$$\frac{u[i, m] - u[i, m - 1]}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{u[i - 1, m] - 2u[i, m] + u[i + 1, m]}{\Delta x^2} \right)$$

Considerando novamente a definição do número de Fourier, esta expressão pode ser escrita como:

$$u[i, m] = u[i, m - 1] + Fo(u[i - 1, m] - 2u[i, m] + u[i + 1, m])$$

Assim, o valor no ponto irá depender do valor no mesmo ponto e no tempo anterior e dos valores vizinhos no mesmo passo de tempo, como respresentado na figura a seguir. A formulação implícita é automaticamente estável para qualquer valor de Fo.



Para ilustrar a aplicação do método implícito, será considerado o mesmo exemplo utilizado anteriormente para o método explícito, mantendo um grid com  $N_i = 5$  elementos. Neste caso pode-se utilizar um valor de  $Fo$  maior, já que não existe problemas de estabilidade. No entanto, será considerado o mesmo valor  $Fo = 0.25$  para possibilitar uma comparação direta. Relembrando, a equação governante e as condições associadas são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(L, t) = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad u(x, 0) = 1$$

A equação discretizada é dada por:

$$u_{i,m} = u_{i,m-1} + Fo(u_{i-1,m} - 2u_{i,m} + u_{i+1,m}) = u_{i,m-1} + Fo(u_{i-1,m} + u_{i+1,m}) - 2Fou_{i,m}$$

Esta relação também pode ser expressa como:

$$(2Fo + 1)u_{i,m} - u_{i,m-1} - Fou_{i-1,m} - Fou_{i+1,m} = 0$$

Novamente, para o nível de tempo inicial, temos que a condição inicial resulta em:

$$u_{0,0} = u_{1,0} = u_{2,0} = u_{3,0} = u_{4,0} = u_{5,0} = 1$$

Para o próximo nível de tempo, as condições de contorno resultam em:

$$u_{5,1} = 0 \quad u_{0,1} = u_{1,1}$$

Para os pontos internos, neste caso será obtido o seguinte sistema de equações:

$$(2Fo + 1)u_{1,1} - u_{1,0} - Fou_{0,1} - Fou_{2,1} = 0 \quad \rightarrow \quad (1.25)u_{1,1} - 0.25u_{2,1} = 1$$

$$(2Fo + 1)u_{2,1} - u_{2,0} - Fou_{1,1} - Fou_{3,1} = 0 \quad \rightarrow \quad (1.5)u_{2,1} - 0.25u_{1,1} - 0.25u_{3,1} = 1$$

$$(2Fo + 1)u_{3,1} - u_{3,0} - Fou_{2,1} - Fou_{4,1} = 0 \quad \rightarrow \quad (1.5)u_{3,1} - 0.25u_{2,1} - 0.25u_{4,1} = 1$$

$$(2Fo + 1)u_{4,1} - u_{4,0} - Fou_{3,1} - Fou_{5,1} = 0 \quad \rightarrow \quad (1.5)u_{4,1} - 0.25u_{3,1} = 1$$

Este sistema linear pode ser expresso como:

$$\begin{bmatrix} 1.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como pode ser visto, neste caso se obtém um sistema tridiagonal que pode ser resolvido, por exemplo, com o uso do algoritmo de Thomas. Resolvendo este sistema, obtém-se em conjunto com as condições de contorno:

$$u_{0,1} = u_{1,1} = 0.999 \quad u_{2,1} = 0.9949 \quad u_{3,1} = 0.9706 \quad u_{4,1} = 0.8284 \quad u_{5,1} = 0$$

Neste caso, pode-se observar que a condição de contorno em  $x = L$  afeta todos os pontos do grid. Este resultado é mais coerente com o comportamento físico do sistema.

Avaliando para o próximo nível de tempo ( $m = 2$ ):

$$\begin{aligned} (2Fo + 1)u_{1,2} - u_{1,1} - Fou_{0,2} - Fou_{2,2} &= 0 & \rightarrow & 1.25u_{1,2} - 0.25u_{2,2} = 0.999 \\ (2Fo + 1)u_{2,2} - u_{2,1} - Fou_{1,2} - Fou_{3,2} &= 0 & \rightarrow & 1.5u_{2,2} - 0.25u_{1,2} - 0.25u_{3,2} = 0.9949 \\ (2Fo + 1)u_{3,2} - u_{3,1} - Fou_{2,2} - Fou_{4,2} &= 0 & \rightarrow & 0.5u_{3,2} - 0.25u_{2,2} - 0.25u_{4,2} = 0.9706 \\ (2Fo + 1)u_{4,2} - u_{4,1} - Fou_{3,2} - Fou_{5,2} &= 0 & \rightarrow & 1.5u_{4,2} - 0.25u_{3,2} = 0.8284 \end{aligned}$$

Na forma matricial, este sistema resulta em:

$$\begin{bmatrix} 1.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 0.9949 \\ 0.9706 \\ 0.8284 \end{bmatrix}$$

Como pode ser visto, a matriz dos coeficientes não é alterada, havendo uma mudança somente na parte não-homogênea. Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$u_{0,2} = u_{1,2} = 0.9968 \quad u_{2,2} = 0.9842 \quad u_{3,2} = 0.929 \quad u_{4,2} = 0.7071 \quad u_{5,2} = 0$$

Fazendo o mesmo procedimento para o próximo nível de tempo ( $m = 3$ ), será obtido o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \\ u_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9968 \\ 0.9842 \\ 0.929 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$u_{0,3} = u_{1,3} = 0.9912 \quad u_{2,3} = 0.9686 \quad u_{3,3} = 0.8839 \quad u_{4,3} = 0.6187 \quad u_{5,3} = 0$$

Finalmente, para  $m = 4$ :

$$\begin{bmatrix} 1.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,4} \\ u_{2,4} \\ u_{3,4} \\ u_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9912 \\ 0.9686 \\ 0.8839 \\ 0.6187 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$u_{0,4} = u_{1,4} = 0.9829 \quad u_{2,4} = 0.9495 \quad u_{3,4} = 0.8396 \quad u_{4,4} = 0.5524 \quad u_{5,4} = 0$$

Comparando com os valores obtidos com o método explícito para o mesmo nível de tempo:

$$u_{0,4} = u_{1,4} = 1 \quad u_{2,4} = 0.9844 \quad u_{3,4} = 0.875 \quad u_{4,4} = 0.54687 \quad u_{5,1} = 0$$

Como visto, os resultados obtidos com os dois métodos estão bem próximos, com a diferença que o método explícito tende a provocar uma variação mais rápida nos pontos próximos a condição de contorno em  $x = L$  e uma variação mais lenta nos pontos mais internos.

De forma geral, o sistema obtido para cada nível  $m$  será da forma:

$$\mathbf{A}\vec{u}_m = \vec{u}_{m-1}$$

onde

$$\vec{u}_m = (u_{1,m}, u_{2,m}, u_{3,m}, u_{4,m})$$