

Aula 11 - Método de Diferenças Finitas para EDP's Elípticas

Élton Fontana

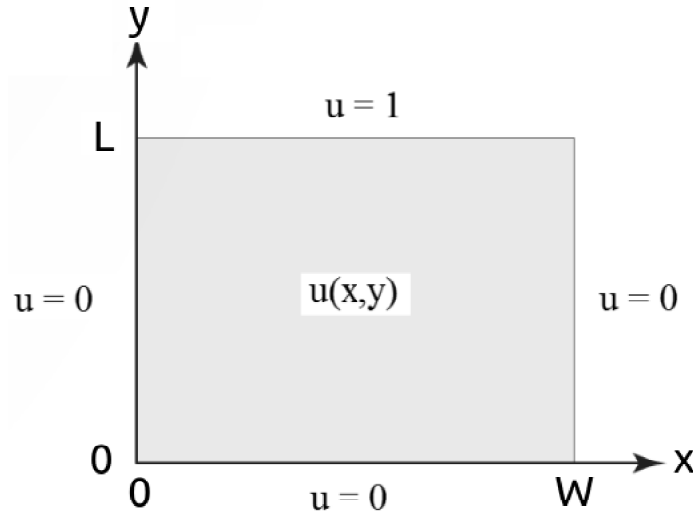
As equações elípticas surgem com frequência na modelagem de problemas de equilíbrio, como por exemplo na descrição de transferência de calor em sistemas bidimensionais em estado estacionário. Como visto na aula anterior, as equações elípticas possuem a característica de que o domínio de dependência e o domínio de influência são iguais e englobam todo o domínio de solução. Por isso, para conhecer o valor de uma dada variável em um ponto, deve-se conhecer os valores em todos os outros pontos. Isto implica que para resolver uma equação elíptica através de métodos numéricos, deve-se resolver todo o domínio de solução simultaneamente. Por isso, o método das linhas não pode ser aplicado neste caso.

Dentre as EDP's elípticas mais importantes, pode-se destacar as equações de Laplace e de Poisson. Em um sistema bidimensional, estas equações são expressas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

1 Equação de Laplace

Para ilustrar a aplicação do método de diferenças finitas para equações elípticas, considere a distribuição de temperatura em um sistema 2D com dimensões $L \times W$ onde três contornos são mantidos em uma temperatura fria T_F e a superfície superior é mantida em uma temperatura quente T_Q . Pode-se definir uma temperatura adimensional $u = (T - T_F)/(T_Q - T_F)$ para facilitar a resolução, de modo que quando $T = T_F$, $u = 0$ e quando $T = T_Q$, $u = 1$. Um esquema deste sistema é apresentado na figura a seguir.



Neste caso, a equação que governa a distribuição de temperatura é a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

com as seguintes condições de contorno associadas:

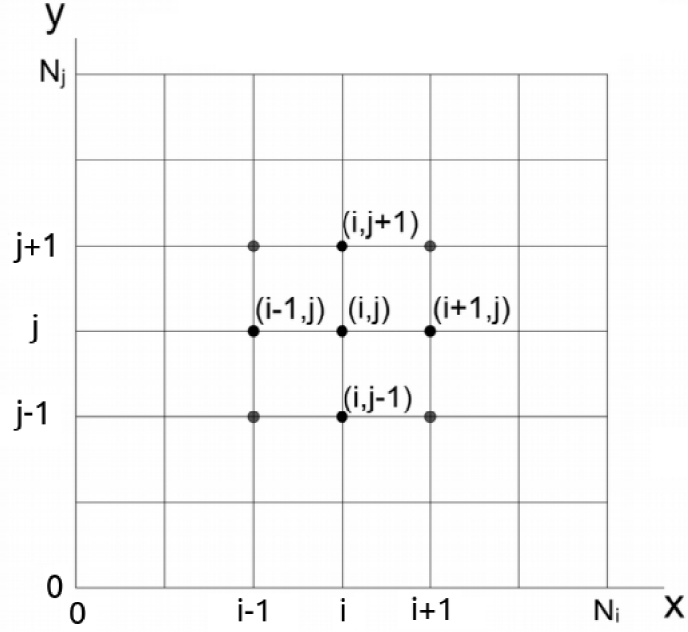
$$u(0, y) = 0 \quad u(W, y) = 0 \quad u(x, 0) = 0 \quad u(x, L) = 1$$

Para resolver este tipo de equação, pode-se aplicar o método de diferenças finitas. Anteriormente, o método foi aplicado para a resolução de EDO's, de modo que a solução buscada era função de somente uma variável independente. O domínio de solução desta variável foi então dividido em um dado número de pontos e aproximações por diferença finitas foram aplicadas para obter uma representação discreta da derivada em cada um destes pontos.

No caso da equação de Laplace, a solução buscada é função de duas variáveis independentes, de modo que o domínio de solução é um plano e não uma reta. Neste caso, também é necessário dividir o domínio em um conjunto de pontos, porém estes pontos irão gerar uma matriz e não um vetor como no caso das EDO's.

Por exemplo, considere que o domínio de solução seja dividido em N_i elementos com tamanho Δx na direção x (ou $N_i + 1$ pontos) e em N_j elementos com tamanho Δy na direção y (ou $N_j + 1$ pontos), como indicado na figura a seguir.

Neste caso, o grid numérico (ou malha numérica) possui duas dimensões, de modo que a solução será deverá ser indicada com dois índices, neste caso $u[i, j]$. O índice i se refere à direção x e o índice j à direção y . Por exemplo, considerando Δx e Δy constantes, o termo $u[3, 6]$ se refere a aproximação da solução em $x = 3\Delta x$ e $y = 6\Delta y$.



A equação de Laplace possui derivadas segundas em relação a duas variáveis independentes x e y . Neste caso, a aproximação por diferenças finitas das derivadas parciais parte de uma expansão em séries de Taylor na direção específica da variável independente analisada. Por exemplo, para avaliar a derivada em relação a x , considera-se y constante e portanto o índice j é mantido fixo e o índice i é variado de acordo com o esquema utilizado. Utilizando um esquema central para a aproximação nas duas direções, temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u[i-1, j] - 2u[i, j] + u[i+1, j]}{\Delta x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u[i, j-1] - 2u[i, j] + u[i, j+1]}{\Delta y^2}$$

Substituindo na EDP:

$$\frac{u[i-1, j] - 2u[i, j] + u[i+1, j]}{\Delta x^2} + \frac{u[i, j-1] - 2u[i, j] + u[i, j+1]}{\Delta y^2} = 0$$

Multiplicando a equação por Δx e definindo $\alpha = \Delta x / \Delta y$:

$$u[i-1, j] - 2u[i, j] + u[i+1, j] + \alpha^2(u[i, j-1] - 2u[i, j] + u[i, j+1]) = 0$$

Colocando os termos $u[i, j]$ em evidência:

$$u[i-1, j] + u[i+1, j] + \alpha^2(u[i, j-1] + u[i, j+1]) - (2 + 2\alpha^2)u[i, j] = 0$$

De modo que:

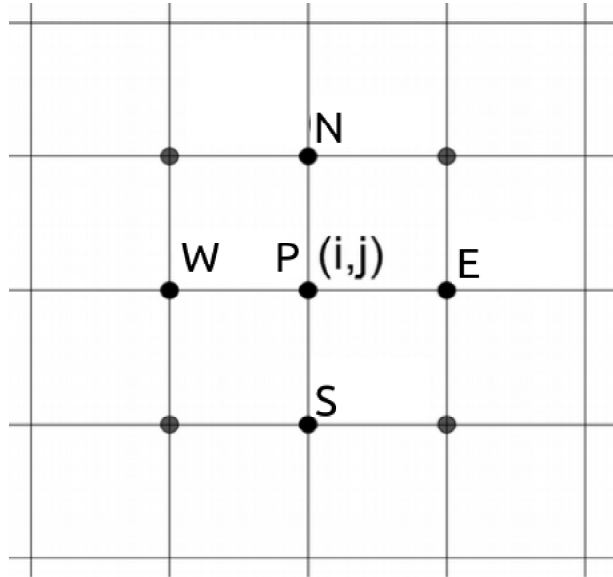
$$u[i, j] = \frac{u[i-1, j] + u[i+1, j] + \alpha^2(u[i, j-1] + u[i, j+1])}{2(1 + \alpha^2)}$$

Esta expressão pode ser utilizada para determinar a solução em um dado ponto com base nos valores dos pontos vizinhos. Como envolve o conhecimento de pontos vizinhos em todas as direções, esta expressão não pode ser utilizada nas fronteiras, onde algum dos vizinhos não é definido. Assim pode-se utilizar a expressão anterior para qualquer valor de i diferente de 0 ou N_i e para qualquer valor de j diferente de 0 ou N_j .

Como pode ser observado, no caso de um grid quadrado, com $\Delta x = \Delta y$, teremos que $\alpha^2 = 1$, de modo que a solução no ponto $[i, j]$ será simplesmente a média aritmética da solução nos seus quatro vizinhos.

Por envolver o valor da variável em um dado ponto e em seus quatro vizinhos, esta forma de aproximação é muitas vezes chamada de *aproximação em 5 pontos*.

Uma notação muito útil para apresentar relações similares a esta pode ser conseguida utilizando o conceito de pontos cardeais. Com isso, os vizinhos a um dado ponto P são representados como pontos leste (E), oeste (W), norte (N) e sul (S), por comparação com uma projeção cartográfica cartesiana, como indicado na figura a seguir.



Neste esquema, o ponto $[i, j]$ é identificado como ponto P , o ponto $[i+1, j]$ como ponto E , e assim sucessivamente. A vantagem de utilizar este esquema é que pode-se associar um coeficiente A com cada ponto, de modo a escrever a equação discretizada como:

$$A_P(u[i, j]) + A_W(u[i-1, j]) + A_E(u[i+1, j]) + A_S(u[i, j-1]) + A_N(u[i, j+1]) = 0$$

No exemplo anterior, os coeficientes associados são:

$$A_P = -(2 + 2\alpha^2) \quad A_W = A_E = 1 \quad A_N = A_S = \alpha^2$$

A discretização de equações elípticas homogêneas em um sistema bidimensional sempre irá gerar uma relação desta forma, portanto pode-se simplesmente alterar os coeficientes A para incluir as modificações em relação a este caso.

1.1 Discretização das Condições de Contorno

Para resolver o sistema de equações lineares, cada ponto do grid deve possuir uma equação linearmente independente associada. A relação anterior pode ser aplicada para todos os pontos externos, enquanto que nas fronteiras pode-se utilizar as condições de contorno.

Relembrando, as condições de contorno associadas são:

$$u(0, y) = 0 \qquad u(W, y) = 0 \qquad u(x, 0) = 0 \qquad u(x, L) = 1$$

A primeira condição, $u(0, y) = 0$, é aplicada em $x = 0$, ou seja, na extremidade esquerda do domínio de solução. Como a direção x é representada pelo índice i , a fronteira $x = 0$ equivale a $i = 0$. Com relação a direção y , identificada pelo índice j , a condição deve ser válida para todos os valores de $j = 0$ até $j = N_j$. Assim, pode-se especificar esta condição de contorno como:

$$u(0, y) = 0 \quad \rightarrow \quad u[0, j] = 0 \qquad j = 0 \quad \text{até} \quad N_j$$

A utilização de índices partindo de 0 e indo até N_i ou N_j causa problema nos vértices do grid, pois nestes pontos pode haver sobreposição de condições de contorno. Por exemplo, considere a condição na superfície superior ($y = L$). Esta condição estabelece que $u(x, L) = 1$. Assim, pode-se definir esta condição na forma discreta como:

$$u(x, L) = 1 \quad \rightarrow \quad u[i, N_j] = 1 \qquad i = 0 \quad \text{até} \quad N_i$$

ou seja, fixa-se a direção y e varia-se a direção x para cobrir todo o domínio de solução. No entanto, no vértice $u[0, N_j]$ (canto superior esquerdo), já havia sido atribuída a condição $u[0, N_j] = 0$. O mesmo problema irá ocorrer em todos os vértices, pois representam uma interseção entre fronteiras que podem ou não ter condições distintas associadas. A pergunta óbvia que deve ser feita neste caso é qual condição deve ser aplicada nos vértices. A resposta não tão óbvia é que não existe uma regra geral para isto. Normalmente, o grid numérico possui um número de elementos suficientemente grande para a escolha não ter

uma importância tão significativa. Neste caso, será considere que nos vértices superiores $u = 1$. Assim, a primeira condição deve ser expressa como:

$$u(0, y) = 0 \quad \rightarrow \quad u[0, j] = 0 \quad j = 0 \quad \text{até} \quad N_j - 1$$

e as demais condições resultam em:

$$u(W, y) = 0 \quad \rightarrow \quad u[N_i, j] = 0 \quad j = 0 \quad \text{até} \quad N_j - 1$$

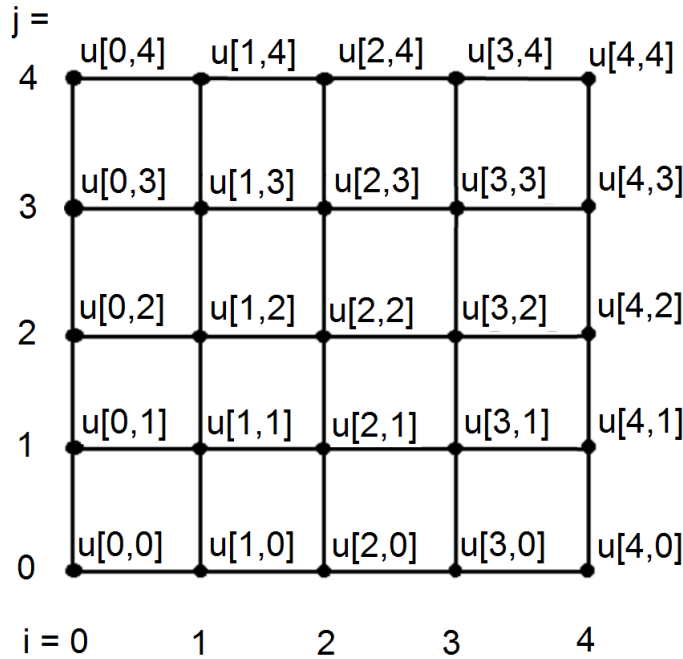
$$u(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad u[i, 0] = 0 \quad i = 1 \quad \text{até} \quad N_i - 1$$

Na última condição, foram especificados valores a partir de $i = 1$ até $i = N_i - 1$ porque os vértices já haviam sido definidos nas demais condições.

Dessa forma, todos os pontos do grid possuem uma equação algébrica associada. Resolvendo este sistema de equações, obtém-se uma aproximação para a solução da EDP.

1.2 Obtenção do Sistema de Equações Algébricas

Para ilustrar este problema, considere uma malha simplificada com $N_i = N_j = 4$ e com igual espaçamento nas direções x e y , de modo que $\Delta x = \Delta y$ e como consequência $\alpha = 1$. Certamente um grid com este número de elementos não é adequado para representar um sistema físico real, mas será utilizado somente para ilustrar a obtenção das equações.



As condições definidas anteriormente, na forma discretizada, foram:

$$\begin{array}{llll}
\text{fronteira esquerda} & u[0, j] = 0 & j = 0 & \text{até } N_j - 1 \\
\text{fronteira superior} & u[i, N_j] = 1 & i = 0 & \text{até } N_i \\
\text{fronteira direita} & u[N_i, j] = 0 & j = 0 & \text{até } N_j - 1 \\
\text{fronteira inferior} & u[i, 0] = 0 & i = 1 & \text{até } N_i - 1
\end{array}$$

A aplicação da condição na fronteira esquerda resulta em:

$$u[0, 0] = u[0, 1] = u[0, 2] = u[0, 3] = 0$$

De forma semelhante, a aplicação das condições nas fronteiras superior, direita e inferior resulta, respectivamente, em:

$$u[0, 4] = u[1, 4] = u[2, 4] = u[3, 4] = u[4, 4] = 1$$

$$u[4, 0] = u[4, 1] = u[4, 2] = u[4, 3] = 0$$

$$u[1, 0] = u[2, 0] = u[3, 0] = 0$$

Estas condições definem os $N_i \times N_j = 16$ pontos da fronteira. Para os pontos internos, deve-se utilizar a equação discretizada obtida anteriormente:

$$A_P(u[i, j]) + A_W(u[i - 1, j]) + A_E(u[i + 1, j]) + A_S(u[i, j - 1]) + A_N(u[i, j + 1]) = 0$$

Com os coeficientes

$$A_P = -(2 + 2\alpha^2) = -4 \quad A_W = A_E = 1 \quad A_N = A_S = \alpha^2 = 1$$

Por exemplo, para $j = 1$, estas equações resultam em:

$$A_P u[1, 1] + A_W u[0, 1] + A_E u[2, 1] + A_S u[1, 0] + A_N u[1, 2] = 0$$

$$A_P u[2, 1] + A_W u[1, 1] + A_E u[3, 1] + A_S u[2, 0] + A_N u[2, 2] = 0$$

$$A_P u[3, 1] + A_W u[2, 1] + A_E u[4, 1] + A_S u[3, 0] + A_N u[3, 2] = 0$$

Como pode ser visto, estas equações dependem também dos valores nas posições $j = 0$ e $j = 2$. Fazendo o mesmo procedimento para as demais linhas, irá se obter equações semelhantes. Neste caso, serão 9 equações além das condições de contorno. Por simplicidade, as aproximações $u[i, j]$ serão representadas por u_{ij} . Assim, considerando os valores

dos coeficientes e as condições de contorno, as equações anteriores podem ser expressas como:

$$-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0$$

$$-4u_{21} + u_{11} + u_{31} + u_{22} = 0$$

$$-4u_{31} + u_{21} + u_{32} = 0$$

De forma semelhante, para $j = 2$, as equações obtidas são:

$$-4u_{12} + u_{22} + u_{13} + u_{11} = 0$$

$$-4u_{22} + u_{12} + u_{32} + u_{23} + u_{21} = 0$$

$$-4u_{32} + u_{31} + u_{22} + u_{33} = 0$$

Finalmente, para $j = 3$

$$-4u_{13} + u_{12} + u_{23} = -1$$

$$-4u_{23} + u_{13} + u_{33} + u_{22} = -1$$

$$-4u_{33} + u_{23} + u_{32} = -1$$

Este sistema pode ser representado na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Este sistema pode ser apresentado de uma forma simplificada como:

$$\begin{bmatrix} B & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & B & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade 3×3 e os blocos B são dados por:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

os vetores \mathbf{u}_x representam os pontos associados com valores fixos de $j = x$.

O sistema linear formado com estas equações irá apresentar uma estrutura conhecida como tridiagonal em blocos. A resolução deste sistema linear através de técnicas de eliminação não costuma apresentar bons resultados, pois a matriz dos coeficientes usualmente é muito esparsa (a maioria dos elementos são nulos). Em contrapartida, métodos iterativos como Jacobi e Gauss-Siedel apresentam excelentes resultados, pois usualmente a matriz possui a diagonal principal dominante.

Resolvendo o sistema de equações, obtém-se os seguintes valores:

$$u_{11} = u_{31} = 0.0714 \quad u_{21} = 0.0982$$

$$u_{12} = u_{32} = 0.1875 \quad u_{22} = 0.25$$

$$u_{13} = u_{33} = 0.4286 \quad u_{23} = 0.5268$$