Aula 10 - Equações Diferenciais Parciais e Método das Linhas

Éliton Fontana

1 Características Gerais das EDP's

Uma equação diferencial parcial é uma equação representando a relação entre uma função de duas ou mais variáveis independentes e as derivadas parciais desta função com respeito a estas variáveis independentes. Nos problemas encontrados com mais frequência na engenharia, as variáveis independentes são usualmente as dimensões espaciais x, y e z e o tempo t.

A grande maioria das EDP's não possui solução analítica, sendo necessário utilizar algum método numérico para obter uma solução aproximada. Dentre as poucas que possuem solução analítica, as mais comuns são a equação de Laplace bidimensional, a equação do calor (ou equação da difusão) e a equação da onda, dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Dentre as características gerais mais importantes para o estudo e classificação das EDP's, pode-se destacar a ordem, linearidade e homogeneidade:

- A ordem de uma equação diferencial é definida como a ordem da derivada de maior ordem presente. Na maioria dos casos (quando termos difusivos são considerados) obtém-se equações de segunda ordem;

- Uma EDP é dita linear se todas as derivadas parciais (incluindo de ordem zero, ou seja, a própria variável dependente) aparecem de uma forma linear e se nenhum dos coeficientes depende da variável dependente;

- A homogeneidade está relacionada com a presença de algum termo que não esteja multiplicado pela variável dependente ou alguma de suas derivadas, sendo uma EDP dita homogênea se nenhum destes termos aparecer na equação. Na maioria dos casos, os termo não-homogêneos estão diretamente relacionados com termos fonte, ou seja, aqueles que não dependem da variável dependente (taxas de geração/consumo, por exemplo).

Além destas classificações comuns a todas as equações diferenciais, as EDP's podem ser classificadas de acordo com como uma perturbação irá se propagar pelo domínio de solução, do ponto de vista geométrico. Esta classificação define a forma como a equação pode ser resolvida e quais os métodos mais adequados, sendo portanto esta classificação fundamental para uma análise correta do problema.

De forma geral os problemas modelados por EDP's são resolvidos com quatro variáveis independentes (três direções espaciais e o tempo). No entanto, a classificação geral pode ser analisadas considerando-se o caso de equações com somente duas variáveis independentes. Além disso, será considero que a EDP é linear. A análise de EDP's não-lineares é mais complexa, porém em muitos casos os problemas podem ser modelados ou aproximados por EDP's lineares. Não-linearidades normalmente estão associados à dependência de algum coeficiente com as variáveis dependentes. Por exemplo, a aplicação das equações de conservação de momento para fluidos não-newtonianos leva a EDP's não-lineares, pois a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear. De forma semelhante, caso a condutividade térmica de um material depender da temperatura, as equações de transferência de calor neste material serão não-lineares.

2 Classificação das EDP's de 2ª Ordem Lineares

De forma geral, uma EDP linear de segunda ordem contendo duas variáveis independentes x e y com uma variável dependente ϕ pode ser expressa como:

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi + G = 0 \quad (1)$$

os coeficientes A, B, C, D, E, F e G podem ser funções das variáveis independentes x e y, mas não da variável ϕ.

A equação característica associada a esta EDO é da forma:

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 0$$

As EDP's são classificadas com base no *discriminante* $\delta = B^2 - 4AC$. As equações onde $\delta < 0$, $\delta = 0$ e $\delta > 0$ são chamadas, respectivamente de *elípticas, parabólicas e hiperbólicas*, sendo que muitas características fundamentais das equações, incluindo os métodos numéricos mais apropriados para resolver a equação, estão diretamente relacionados com esta classificação. Observe que a natureza da equação depende somente dos coeficientes associados com os termos de segunda ordem, sendo que os termos de primeira e de ordem zero não possuem nenhuma influência na classificação.

A classificação das EDP's como elípticas, parabólicas e hiperbólicas está diretamente relacionada com a presença ou não de *caminhos característicos* nas equações. O caminho característico representa a direção no domínio de solução onde a informação é transportada. Por exemplo, considere o caso onde uma determinada espécie química se propaga em um meio contínuo. Caso o meio for estacionário (por exemplo, um perfume difundido em uma sala com ar estagnado), a propagação será em todas das direções, sem uma direção preferencial. Neste caso, diz-se que não existe um caminho preferencial. Porém, caso exista um campo de velocidades (por exemplo, se um ventilador for ligado), a propagação irá ocorrer com maior intensidade em uma direção, neste caso existe então um caminho característico.

A quantidade de caminhos característicos está associado com as raízes da equação característica, conforme a tabela a seguir.

$B^2 - 4AC$	Raízes da eq. caract.	Caminhos caract.	Classificação
< 0	Complexas	0	Elíptica
$= 0$	Real e repetida	1	Parabólica
> 0	Reais e distintas	2	Hiperbólica

A presença de caminhos característicos no domínio de solução leva ao conceito de *domínio de dependência* e *domínio de influência*. Considere um ponto P no domínio de solução. O domínio de dependência do ponto P é definido como a região do domínio de solução que afeta o ponto P. Assim, o ponto P depende de tudo que acontece no domínio de dependência. O domínio de influência do ponto P é definido como a região do domínio de solução que é influenciada pelo ponto P, ou seja, o ponto P afeta tudo que está em seu domínio de dependência. Caso uma perturbação seja causada no ponto P, esta perturbação irá afetar tudo que está no domínio de influência de P. De forma semelhante, qualquer perturbação no domínio de dependência irá afetar a solução no ponto P.

As equações parabólicas e hiperbólicas possuem caminhos característicos reais e, como consequência, domínios de dependência e de influência específicos. As equações elípticas, no entanto, não possuem caminhos característicos. Neste caso, tanto o domínio de dependência quanto o de influência correspondem a todo o domínio de solução da equação. Estes resultados são ilustrados na Figura 1.

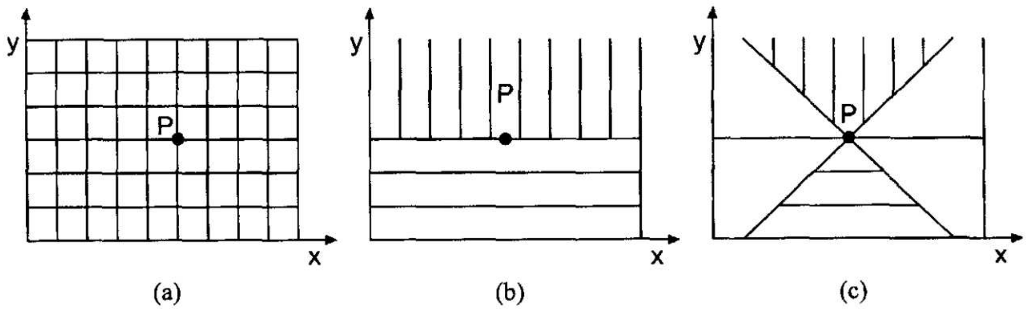


Figure 1: Domínio de dependência (linhas horizontais) e de influência (linhas verticais) para EDP's (a) elípticas, (b) parabólicas e (c) hiperbólicas. y e x representam as variáveis independentes.

Em resumo, a interpretação física da classificação das EDP's pode ser explicada em termo da equação característica:

- Se raízes reais existirem (EDP's parabólicas e hiperbólicas), caminhos preferenciais de propagação de informação existem, sendo que a velocidade de propagação irá depender da inclinação dos caminhos característicos. Como consequência, domínios de influência e dependência específicos irão existir para cada ponto no domínio de solução. Problemas físicos governados por este tipo de equação são chamados de *problemas de propagação* e usualmente estão associados a um comportamento transiente;

- Se as raízes da equação característica forem complexas (EDP elíptica), não existe um caminho preferencial de propagação. A solução em cada ponto influencia e é influenciada pela solução em todos os outros pontos do domínio de solução. Os problemas físicos governados por este tipo de equação são chamados de *problemas de equilíbrio*, estando associados com problemas estacionários.

2.1 EDP's Elípticas, $\delta < 0$

As EDP's elípticas surgem naturalmente quando o termo de derivada cruzada é nulo e A e C (coeficientes associados às derivadas de 2^a ordem) são positivos. Um exemplo de EDP elíptica é a Equação de Laplace mencionada anteriormente.

Considere, por exemplo, a equação que descreve a condução de calor em um meio bidimensional ($B = 0, A = 1, C = 1$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Esta equação admite solução analítica através do método de separação de variáveis. No entanto, para fins de definir as características geras associadas às equações elípticas, a equação para condução unidimensional mantém todas as características mais importantes associadas e por isso será usada como exemplo.

Considere a equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Com condições de contorno de temperatura fixa $T(0) = T_0$ e $T(L) = T_L$, com $T_L > T_0$. A solução desta equação é da forma:

$$T(x) = T_0 + \frac{(T_L - T_0)}{L}x$$

Esta equação apresenta duas características associadas ao comportamento elíptico da equação:

1 - A temperatura em qualquer ponto P no domínio é influenciada pela temperatura nas duas extremidades $x = 0$ e $x = L$;

2 - Na ausência de termos-fonte, $T(x)$ é limitada pelas temperaturas nas extremidades, sendo que $T(x)$ não pode ser maior que T_L nem menor que T_0.

Como esta equação não possui caminhos característicos, os domínios de dependência e de influência são iguais a todo o domínio de solução. Além disso, como a derivada não apresenta nenhuma descontinuidade ao longo do domínio, a distribuição de temperatura será contínua.

2.2 EDP's Parabólicas, $\delta = 0$

As EDP's parabólicas surgem quando $B = 0$ e $A = 0$ ou $C = 0$. Um exemplo clássico de EDP parabólica é a equação da difusão (de calor ou massa) transiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Esta equação é uma EDP de segunda ordem em relação a x, sendo portanto necessário especificar duas condições de contorno, por exemplo:

$$T(0,t) = T_0 \qquad\qquad T(L,t) = T_0$$

Em relação ao tempo, a equação é de primeira ordem, de modo que somente uma condição inicial precisa ser especificada, por exemplo:

$$T(x,0) = T_i$$

Esta é uma característica das EDP's parabólicas, onde não é necessário definir duas condições para uma das variáveis, ou seja, não é necessário definir uma condição final para o sistema (não é preciso prever o futuro para resolver a EDP!).

Utilizando o método de separação de variáveis, obtém-se a seguinte solução para a EDP:

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(c_n^1 x) e^{c_n^2 t}$$

onde

$$c_n^1 = \frac{n\pi}{L} \qquad\qquad c_n^2 = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2}$$

e

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L (T_i - T_0) \sin(c_n^1 x) dx$$

ou seja, B_n é uma função da condição inicial e da direção x.

Através desta solução, pode-se observar que:

- A temperatura nas extremidades, T_0, influencia a temperatura $T(x,t)$ em qualquer ponto do domínio, da mesma forma que para as EDP's elípticas;

- A condição inicial T_i influencia a temperatura para todos os tempos futuros. No entanto, como c_n^2 é negativo, esta influência diminui com o passar do tempo. No limite quando $t \to \infty$, esta influência tende a zero e a equação passa a ter um comportamento elíptico;

- A temperatura em qualquer ponto do domínio de solução é limitada pelas condições de contorno e inicial.

Com base neste exemplo, pode-se perceber que a variável t possui um comportamento bem distinto da variável x. As variações em t admitem somente influência em *uma direção*, enquanto que as variações em x ocorrem em *duas direções*. Como, neste caso, t representa o tempo, este comportamento já é esperado pelo comportamento físico do sistema (o presente altera somente o futuro e não o passado), no entanto, este comportamento é observado em qualquer EDP parabólica, mesmo quando somente variáveis espaciais são consideradas. Por exemplo, no escoamento no interior de tubos (função das direções radial e axial), a direção axial possui um comportamento parabólico. Os métodos numéricos utilizados para este tipo de equação devem considerar este comportamento, sendo necessário o uso de métodos de *marcha no tempo* (*time-marching*) para a resolução da equação.

2.3 EDP's Hiperbólicas, $\delta > 0$

Considere o caso do escoamento unidimensional transiente de um fluido no interior de um tubo com uma velocidade constante $U > 0$. O fluido é alimentado a uma temperatura T_0 e, nas condições do escoamento, a transferência de calor por condução pode ser desprezada. A equação que descreve a variação da temperatura ao longo do escoamento é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p U T) = 0$$

com as condições:

$$T(x,0) = T_i \qquad\qquad T(0,t) = T_0$$

Apesar de possuir some termos de primeira ordem, está é uma equação hiperbólica. Para provar isto, basta diferenciar a equação em relação a t ou a x, onde se obtém que os coeficientes A ou C são nulos e $B > 0$, considerando que as propriedades físicas e a velocidade são positivas.

A solução para este problema será uma função descontínua da forma:

$$T(x,t) = \begin{cases} T_i & t < \dfrac{x}{U} \\ T_0 & t \geq \dfrac{x}{U} \end{cases}$$

Basicamente, esta função representa uma descontinuidade (degrau) na solução que viaja ao longo do domínio. Neste caso, o termo x/U funciona como um *tempo característico*.

Conforme o fluido é alimentado com uma temperatura T_0, leva um determinado tempo para que este afete a temperatura em um posição x longe da entrada, sendo este tempo uma função *somente* da velocidade U.

Com base nesta solução, pode-se observar as seguintes características associadas com as EDP's hiperbólicas:

- A condição de contorno especificada em $x = 0$ afeta somente a temperatura para $x > 0$. Caso valores de $x < 0$ fossem avaliados, estes não seriam afetados por T_0;
- A condição de contorno na entrada se propaga ao longo do domínio de solução com uma velocidade finita U;
- Qualquer variação nas condições da entrada não serão sentidas em um ponto x até que $t = x/U$.

3 Método das Linhas

O método das linhas é um método semi-discreto para a resolução de EDP's que consiste em discretizar as variáveis espaciais e manter a variável temporal contínua, de modo a transformar a EDP em um sistema de EDO's que pode então ser resolvido através dos métodos vistos anteriormente para a resolução de PVI's (como os métodos de Runge-Kutta). A abordagem utilizada para a discretização das variáveis espaciais usualmente é o método de diferenças finitas, por isso o método das linhas é muitas vezes chamado de método de diferenças finitas semi-discreto.

Este método é aplicado principalmente para equações parabólicas, pois sua aplicação em equações elípticas origina um conjunto de PVC's, o que por sua vez também precisam ser resolvido por métodos de discretização. Quando aplicado em equações parabólicas, a variável que possui um caminho característico é mantida contínua enquanto as demais são discretizadas.

Por exemplo, considere a equação do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Para obter uma solução particular para esta equação, é preciso especificar duas condições de contorno e uma condição inicial. Considere, por exemplo, as seguintes condições:

$$T(0,t) = T_a \qquad T(L,t) = T_b \qquad T(x,0) = \sin(x)$$

Neste caso, pode-se discretizar a derivada em relação à direção x. Usando um esquema central:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Substituindo esta forma discreta na EDP, obtém-se um sistema de EDO's para avaliar a variação temporal das variáveis T_i:

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}\right)$$

A aplicação das condições de contorno vão resultar em valores específicos para a variável T_i nas extremidades $x = 0$ e $x = L$ que serão válidos para qualquer tempo, visto que estas condições são fixas. A condição $T(0,t) = T_a$ vai resultar em $T_0 = T_a$, enquanto que a condição $T(L,t) = T_b$ vai resultar em $T_N = T_b$, onde $N + 1$ é o número total de pontos utilizados para discretizar o domínio de solução na direção x.

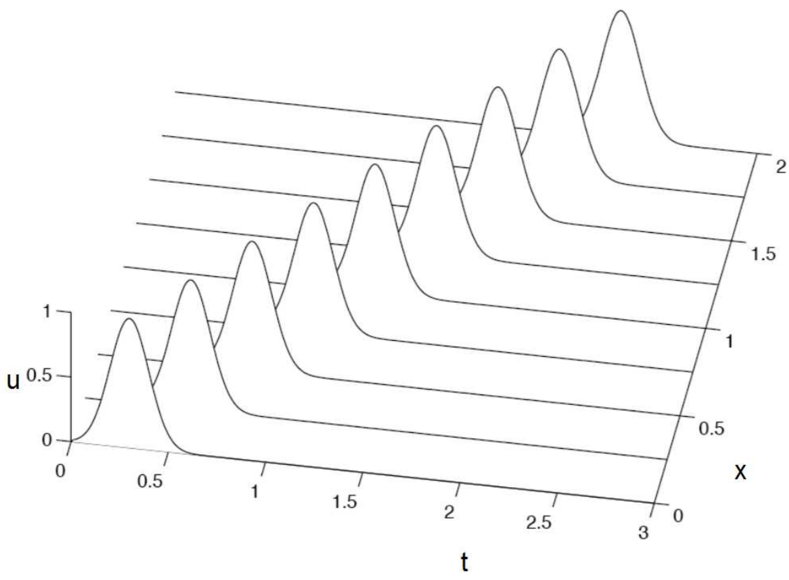
Para resolver este sistema de EDO's para os i pontos, é preciso especificar condições iniciais para cada valor T_i. Como a variável T_i representa a temperatura na posição x_i, o valor inicial pode ser obtido diretamente da condição inicial especificada anteriormente aplicada no ponto x_i. A condição inicial era da forma:

$$T(x, 0) = \sin(x)$$

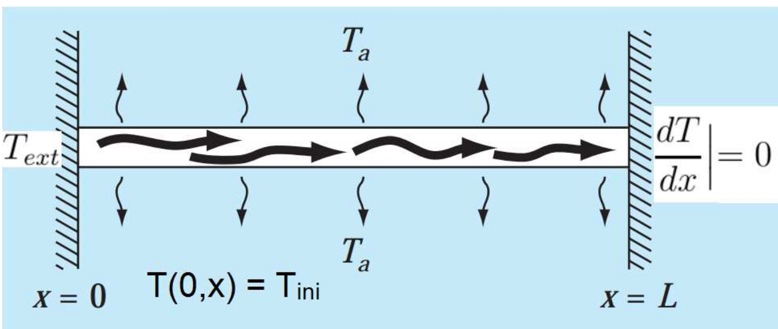
Assim, para cada variável T_i teremos uma condição inicial associada da forma:

$$T_i(0) = \sin(x_i)$$

Observe que enquanto a temperatura é uma função da posição e do tempo ($T(x,t)$), as variáveis T_i são funções apenas do tempo $T_i(t)$, pois representam a temperatura em um ponto fixo x_i. A aplicação do método das linhas vai originar uma série de curvas (daí o nome método das linhas), contínuas em relação ao tempo, que representam como a temperatura varia em cada ponto x_i. A figura a seguir ilustra a forma da solução de uma EDP com duas variáveis independentes obtida com o método das linhas.



Para ilustrar a aplicação do método das linhas, considere que se deseje obter a variação de temperatura ao longo de uma barra metálica com uma extremidade isolada e outra mantida a uma temperatura T_{ext} e que perde calor para o meio externo por convecção, da mesma forma que analisado na aula anterior. Neste caso, porém, considere que se deseje obter como a temperatura varia ao longo do tempo a partir de um estado inicial $T(x,0) = T_{ini}$.



A equação que descreve a variação na temperatura ao longo da posição x e do tempo t neste caso será:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h'\alpha(T - T_a)$$

As condições de contorno associadas a este problema são:

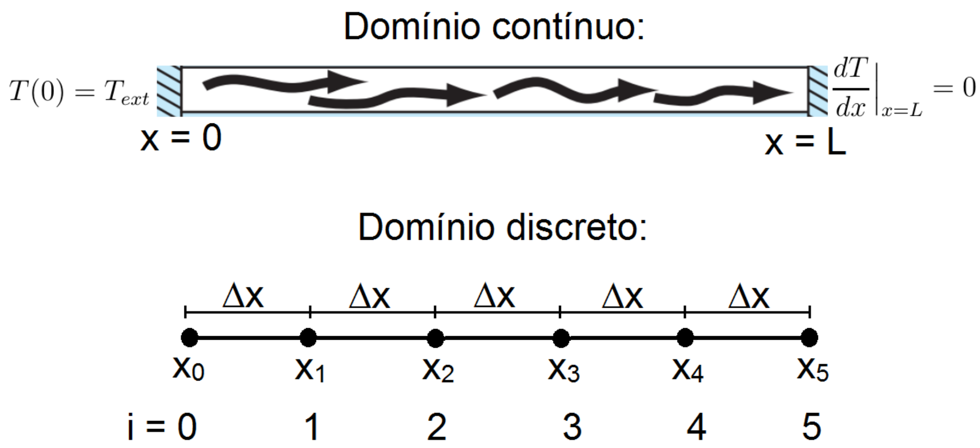
$$T(0,t) = T_{ext} \qquad \qquad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0$$

Além disso, a condição inicial utilizada é da forma:

$$T(x,0) = T_{ini}$$

De forma geral, as condições de contorno podem ser função do tempo, da mesma forma que a condição inicial pode ser uma função de x.

Para resolver esta equação com o método das linhas, é preciso discretizar a equação na direção espacial e manter a função contínua no tempo. Assim, deve-se definir um domínio discreto na direção x. Neste caso, será considerado o mesmo domínio discreto utilizada anteriormente, com $N+1=6$ pontos:



Neste caso, a discretização da EDP na direção x irá resultar um conjunto de valores $(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5)$ que representam a temperatura nos pontos respectivos $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Neste caso, porém, estes valores T_i não são necessariamente constantes, mas são uma função do tempo.

A EDP avaliada neste exemplo envolve a derivada segunda em relação a direção x, então deve-se discretizar esta derivada. Considerando um esquema central, a derivada segunda nos pontos x_i são dadas por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Substituindo na EDP, obtém-se:

$$\frac{dT_i}{dt} = \alpha \left(\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) - h'\alpha(T_i - T_a)$$

Esta equação pode ser aplicada nos pontos $i = 1, 2, 3, 4$ para obter uma EDO para a temperatura em cada um destes pontos. Para resolver este sistema de EDO's, é preciso definir uma condição inicial para cada ponto. Como a temperatura inicial é considerada constante e igual a T_{ini}, basta associar este valor com a temperatura em cada ponto:

$$T_i(0) = T_{ini}$$

Para fechar o sistema de equações, é preciso ainda definir equações para T_0 e T_5, que são obtidas através da aplicação das condições de contorno. A condição $T(0,t) = T_{ext}$ resulta diretamente em:

$$T_0 = T_{ext}$$

Assim, obtém-se uma equação para a temperatura na extremidade $x = 0$. Na extremidade $x = L$, a condição é de derivada nula. Como visto anteriormente, neste caso pode-se aplicar um esquema de discretização para trás, de onde se obtém que $T_5 = T_4$. Com estas duas condições extras, o sistema de EDO's pode ser resolvido.

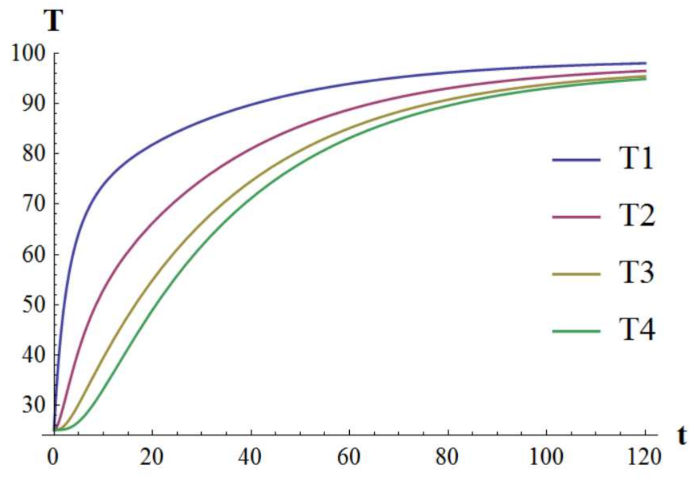
De forma resumida, as equações para os 6 pontos são:

$$\begin{aligned}
&T_0 = T_{ext} \\
\frac{dT_1}{dt} &= \alpha\left(\frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{(\Delta x)^2}\right) - h'\alpha(T_1 - T_a) \qquad && T_1(0) = T_{ini} \\
\frac{dT_2}{dt} &= \alpha\left(\frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{(\Delta x)^2}\right) - h'\alpha(T_2 - T_a) \qquad && T_1(0) = T_{ini} \\
\frac{dT_3}{dt} &= \alpha\left(\frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{(\Delta x)^2}\right) - h'\alpha(T_3 - T_a) \qquad && T_1(0) = T_{ini} \\
\frac{dT_4}{dt} &= \alpha\left(\frac{T_5 - 2T_5 + T_3}{(\Delta x)^2}\right) - h'\alpha(T_4 - T_a) \qquad && T_1(0) = T_{ini} \\
&T_5 = T_4
\end{aligned}$$

As equações para $i = 1, 2, 3, 4$ formam um sistema de PVI's que pode ser resolvido por algum dos métodos vistos anteriormente para a resolução de PVI's, como os métodos de Runge-Kutta.

Considere, por exemplo, novamente que um caso onde $L = 1\,cm$ ($\Delta x = 0.2\,cm$), $T_{ext} = 100°C$, $T_a = 25°C$ e $h' = 0.1\,cm^{-2}$. Além disso, considere que $\alpha = 0.01\,cm^2/s$ e $T_{ini} = 25°C$. Neste caso, a barra metálica está inicialmente na mesma temperatura que o ambiente externo. Em um dado instante, a temperatura na extremidade $x = 0$ é aumentada para $100°C$.

Resolvendo o sistema de equações utilizando Runge-Kutta de quarta ordem, obtém-se as curvas apresentadas na figura a seguir.



Pode-se observar que para altos valores de tempo as temperaturas tendem a um valor específico, ou seja, tendem para um valor estacionário. Estes valores correspondem exatamente aos obtidos na aula anterior para a resolução do caso onde o comportamento transiente foi desprezado.