

Aula 09 - Métodos Numéricos para Problemas de Valor de Contorno

Éliton Fontana

Equações diferenciais de ordem maior que um podem gerar problemas de valor inicial (PVI) ou problemas de valor de contorno (PVC), dependendo da forma como as condições conhecidas são especificadas. Por exemplo, considere a EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Até o momento, foram analisados principalmente casos onde condições iniciais conhecidas são especificadas da forma:

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0$$

originando desta forma um PVI. Para a resolução numérica de PVI's, pode-se partir da condição inicial e ir avançando até um tempo final arbitrário.

Em muitos casos, os problemas envolvem condições conhecidas em pontos diferentes, sendo estas chamadas de condições de contorno, podendo ser expressas, por exemplo, como:

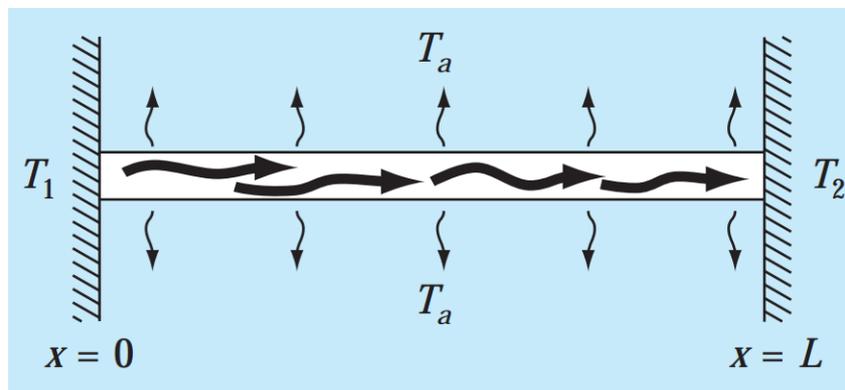
$$y(\alpha) = y_0 \quad y(\beta) = y_1$$

De forma geral, os PVC's envolvem uma coordenada espacial como variável independente. Assim, a resolução de um PVC's consiste em buscar uma solução que satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < x < \beta$ juntamente com as condições de contorno especificadas. Isto implica que existem duas condições, em pontos diferentes do domínio de solução, que deve ser simultaneamente satisfeitas. Por isso, os métodos de marcha (como os de Runge-Kutta) não podem ser empregados neste caso.

1 Estratégias de Solução de PVC's

Os métodos para resolver problemas de valor de contorno se dividem em duas categorias: os baseados em transformar o PVC em um PVI e os baseados em discretizar a equação utilizando métodos de diferenças finitas.

Os métodos que transformação PVC's e PVI's consistem basicamente em utilizar uma das condições de contorno como condição inicial e assumir (chutar) diferentes valores para uma segunda condição inicial de modo que o resultado obtido satisfaça a segunda condição de contorno. Por exemplo, considere a seguinte equação utilizada para descrever a variação na temperatura em uma barra que perde calor para o ambiente por convecção, como apresentado na figura a seguir.



Considerando que a barra seja muito fina, com raio muito menor que o comprimento, pode-se assumir que a equação que descreve a variação na temperatura ao longo de x pode ser expressa como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

onde h' é um coeficiente de troca térmica e T_a é a temperatura ambiente.

As condições de contorno corresponde a temperatura fixas nas extremidades, em $x = 0$ e $x = L$, de modo que:

$$T(0) = T_1 \quad T(L) = T_2$$

Para transforma a equação em um PVI equivalente, primeiramente é preciso aplicar o método de redução de ordem. Escrevendo o PVI como:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= z & T(0) &= T_1 \\ \frac{dz}{dx} + h'(T_a - T) &= 0 & z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

O valor de z_0 não é conhecido, pois o valor da derivada de T em $x = 0$ não foi especificado. O método utilizado neste caso consiste em assumir diferentes valores para z_0 até que a condição $T(L) = T_2$ seja satisfeita. Para equações lineares, este método funciona razoavelmente bem, pois pode-se interpolar os valores para $T(L)$ obtidos para diferentes valores de z_0 para encontrar o valor de z_0 que corresponde a solução correta do problema. No entanto, de modo geral este método é pouco utilizado, em particular porque os métodos baseados em aproximações por diferenças finitas costumam ser mais eficientes, como ser apresentado a seguir.

2 Aproximações por Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas é um método de *discretização* de equações diferenciais. Isto significa que ele transforma uma função contínua em uma representação discreta (pontos). Por exemplo, considere uma função $f(x) = 2x$ definida em um intervalo entre 0 e 1. Esta função pode ser representada de forma discreta como, por exemplo, $f[x] = [0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2]$, assumindo um espaçamento entre os pontos de 0.2, ou seja, esta representação está relacionada como um domínio discreto da forma $x = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$.

As soluções obtidas com a aplicação do método de diferenças finitas sempre serão discretas. Caso for necessário obter os valores para algum valor de x que não corresponda exatamente aos pontos do domínio, pode-se interpolar os valores.

A primeira etapa da aplicação do método de diferenças finitas consiste exatamente em definir o domínio discreto onde a solução será buscada. Por exemplo, considere o caso apresentado anteriormente para a distribuição de calor em uma barra estacionária. A região onde se deseja obter a distribuição de temperatura é no intervalo de $x = 0$ até $x = L$. Este intervalo corresponde ao *domínio de solução* da equação diferencial. No entanto, ele está em uma forma contínua e não discreta. Para discretizar o domínio, deve-se dividi-lo em um determinado número de pontos. Por exemplo, considere que $L = 1$ e que se deseja dividir o domínio em pontos com espaçamento $\Delta x = 0.1$, ou seja, deseja-se dividir o domínio em 10 elementos de igual tamanho. Quanto mais elementos forem utilizados, maior será a precisão do método, porém o gasto computacional também irá aumentar.

O domínio discreto será então:

$$x = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]$$

Como pode ser visto, este conjunto contém 11 pontos. De maneira geral, o número de pontos sempre será igual ao número de elementos em que o domínio é dividido mais 1. Este vetor pode ser representado de uma forma mais simples como:

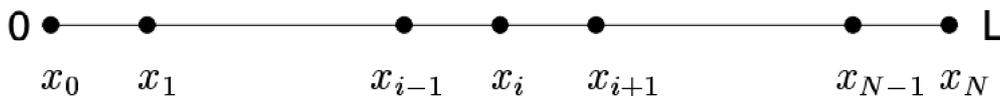
$$x[i] = i\Delta x \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10$$

Na resolução de PVI's, não é necessário inicialmente definir o domínio de solução, pois pode-se continuar avançando por quantos passos forem necessários, partindo de um valor inicial. No entanto, para o caso de PVC's, o domínio de solução é fechado e deve ser considerado como um todo. Dependendo da formulação utilizada, pode até mesmo ser necessário obter os valores para todos os pontos ao mesmo tempo.

A estratégia do método de diferenças finitas consiste em buscar equações algébricas que aproximem a solução em cada ponto i . Para isso, as derivadas são aproximadas como relações algébricas envolvendo a solução em diferentes valores de i . Esta aproximação pode ser realizada de diferentes formas, dependendo da precisão desejada e da natureza do problema e das condições de contorno. Porém, a origem destas aproximações sempre é uma aproximação em série de Taylor em torno de cada ponto i , como será discutido a seguir.

2.1 Aproximação da Derivada Primeira

Para apresentar o processo de discretização da derivada de uma função contínua $y(x)$ em um intervalo $0 \leq x \leq L$, será considerado um domínio discreto como o apresentado na figura a seguir, onde o domínio físico contínuo (região entre 0 e L) é dividido em $N + 1$ pontos. Lembrando novamente, o objetivo do método de diferenças finitas é obter aproximações para o valor da função $y(x)$ em cada um destes $N + 1$ pontos.



Esta representação discreta do domínio de solução é normalmente chamada de *grid numérico* ou *malha numérica*.

Como visto em aulas anteriores, a expansão em série de Taylor pode ser utilizada para avaliar o valor de uma função em um dado ponto com base no valor conhecido em outro ponto. Dependendo da forma como a aproximação é realizada, obtêm-se diferentes formulações para o método de diferenças finitas, como será apresentado a seguir.

2.1.1 Aproximação para Frente (Foward)

Considere que se deseja aproximar o valor em x_{i+1} com base no valor em x_i , ou seja, deseja-se aproximar $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$ com base em $y(x_i) = y_i$.

A expansão em série de Taylor neste caso pode ser expressa como:

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x=x_i} + \dots \quad (1)$$

Considerando novamente que $(x_{i+1} - x_i)$ seja relativamente pequeno, os termos de alta proporcionais a $(x_{i+1} - x_i)^2, (x_{i+1} - x_i)^3, \dots$ podem ser desprezados. Assim, a derivada primeira da função $y(x)$ no ponto x_i pode ser aproximada como:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Definindo $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, a expressão pode ser dada por:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

Esta expressão é conhecida como *aproximação por diferenças finitas para frente* (ou método de diferenças finitas para frente), pois utiliza o valor da função em um ponto a frente x_{i+1} para estimar o valor da derivada em um ponto anterior x_i . Fazendo o limite de Δx tendendo a zero:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

obtém-se a própria definição da derivada em um ponto. Portanto, esta formulação é *consistente*.

Como pode ser visto, este método é equivalente ao método de Euler explícito, sendo que a diferença é que no método de Euler deseja-se aproximar o valor da função em diferentes pontos com base no conhecimento da derivada $dy/dt = f(t, y)$ e no método de diferenças finitas deseja-se aproximar o valor da derivada com base no valor em diferentes pontos. Nos dois casos, porém, ocorre uma linearização da função em torno de um ponto.

Na aproximação da derivada, foram desprezados os termos $O(x_{i+1} - x_i)^2$, assim, o erro de truncamento local do método de diferenças para frente é da ordem de $O(\Delta x^2)$. De forma semelhante ao apresentado para o método de Euler, pode-se mostrar que quando aplicado para avaliar N pontos, o erro associado será da ordem de $O(x_{i+1} - x_i) = O(\Delta x)$, ou seja, a aproximação por diferenças para frente é um método de *primeira ordem*.

2.1.2 Aproximação para Trás (Backward)

De forma semelhante ao realizado para obter a derivada em x_i com base na expansão para obter y_{i+1} , pode-se realizar uma expansão para obter a função em x_{i-1} :

$$y_{i-1} = y_i + (x_{i-1} - x_i) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^3}{3!} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x=x_i} + \dots$$

Considerando que o espaçamento entre os pontos é constante, temos novamente que $\Delta x = x_i - x_{i-1} = -(x_{i-1} - x_i)$, assim:

$$y_{i-1} = y_i - (\Delta x) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x=x_i} + \dots \quad (2)$$

Novamente, desprezando os termos de ordem maior ou igual a 2, obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$$

esta aproximação é conhecida como *aproximação por diferenças finitas para trás* (ou método de diferenças finitas para trás), e também representa uma aproximação de primeira ordem para a derivada em um dado ponto x_i .

A utilização dos métodos para trás ou para frente é, a princípio, equivalente. A única restrição ocorre nos pontos extremos do domínio. Por exemplo, no ponto x_0 não pode ser aplicado o método para trás pois não existe um ponto anterior a este. De forma semelhante, no ponto x_N a formulação para frente não pode ser utilizada, pois de maneira equivalente não existe nenhum ponto após este para ser utilizado de base.

2.1.3 Aproximação Central

De forma geral, a utilização de métodos de primeira ordem para a discretização de todos os pontos do domínio não costuma apresentar bons resultados, especialmente nos casos envolvendo gradientes aproximadamente simétricos em relação a direção x , como por exemplo problemas envolvendo condução de calor ou difusão de massa.

Uma aproximação de segunda ordem pode ser obtida fazendo a expansão para y_{i+1} (Eq. 1) menos a expansão para y_{i-1} (Eq. 2). Com isso, obtém-se:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2\Delta x \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{2(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x=x_i} + \dots$$

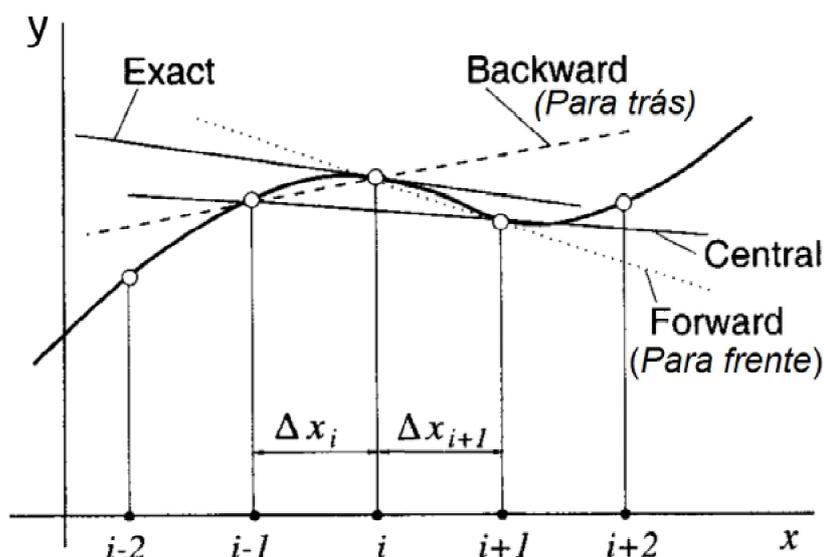
Desprezando agora os termos da ordem de $O(\Delta x)^3$, pode-se obter a seguinte expressão para uma aproximação da derivada primeira em x_i :

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$$

Esta expressão é conhecida como *aproximação de diferenças finitas central* (ou método de diferenças finitas central). Neste caso, o erro de truncamento local é da ordem de $O(\Delta x)^3$, de modo que o erro global será da ordem de $O(\Delta x)^2$. Assim, esta aproximação é de segunda ordem.

Existem aproximações de ordem superior, porém a aproximação central é a mais empregada, sendo adequada para a maioria dos casos. Novamente, dever-se observar que esta aproximação não pode ser aplicada nos pontos extremos do sistema. A melhor estratégia para a discretização da equação é utilizar o método central para os pontos internos, o método para frente no ponto x_0 e o método para trás no ponto x_N .

Uma comparação geométrica dos três esquemas de discretização é apresentada na figura a seguir.



2.2 Aproximação da Derivada Segunda

O método de diferenças finitas pode ser aplicado também para a discretização de derivadas de maior ordem. As aproximações para a derivada segunda são obtidas considerando a definição da derivada em um ponto. Da mesma forma que a derivada primeira pode ser aproximada em termos da variação da função em dois pontos, a derivada segunda pode ser aproximada em termos da variação na derivada primeira em dois pontos. Por exemplo, utilizando um esquema para frente:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_i} = \frac{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_{i+1}} - \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_i}}{x_{i+1} - x_i}$$

onde a derivada avaliada no ponto x_{i+1} , utilizando novamente um esquema para frente, é obtida de forma equivalente a derivada no ponto x_i como:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_{i+1}} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$

Considerando que os pontos sejam igualmente espaçados (grid igualmente espaçado), pode-se juntar as expressões para a derivada em x_{i+1} e a expressão para a derivada em x_i , obtém-se a seguinte expressão para a derivada segunda em x_i :

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_i} = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{(\Delta x)^2}$$

Esta expressão representa o esquema para frente aplicado à derivada segunda. Como ele se baseia em esquemas de primeira ordem, também é uma aproximação de primeira ordem.

Fazendo um procedimento semelhante utilizando o esquema para trás, obtém-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_i} = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{(\Delta x)^2}$$

sendo este o esquema para trás aplicado para a derivada segunda, sendo também um método de primeira ordem.

Utilizando o esquema central, obtém-se a seguinte aproximação:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

sendo esta uma aproximação de segunda ordem. Novamente, a estratégia que normalmente resulta em um melhor resultado é utilizar o esquema central para os pontos internos e os esquemas para frente e para trás para o primeiro e para o último ponto, respectivamente.

2.3 Discretização das Condições de Contorno

Além da equação diferencial envolvendo a derivada da função, a resolução de Problemas de Valor de Contorno necessita que determinadas condições de contorno também sejam em determinados pontos do domínio.

Para o caso de condições que consistem em definir o valor da função em um dado ponto, basta atribuir este valor para a função discretizada no ponto. Por exemplo, considere o exemplo anterior de transferência de calor em uma barra, onde a temperatura nas duas extremidades era conhecida: $T = T_1$ em $x = 0$ e $T = T_2$ em $x = L$. Considerando que x_0 corresponde ao ponto inicial $x = 0$ e x_N corresponde ao ponto $x = L$, as condições de contorno são implementadas definindo:

$$T_0 = T_1 \quad T_N = T_2$$

Em muitos casos, a condição de contorno envolve a própria derivada de função em algum ponto. Por exemplo, considere que no exemplo da transferência de calor na barra metálica, a extremidade $x = L$ fosse mantida isolada termicamente. Neste caso, a condição de contorno é expressa como:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Neste caso, é necessário discretizar a condição de contorno para transformá-la numa relação algébrica. Como este ponto corresponde ao último ponto do domínio, os esquemas para frente e central não podem ser utilizados, pois iriam depender de um ponto y_{N+1} que está fora do domínio de solução. Assim, é necessário utilizar o esquema para trás, de modo que a condição pode ser discretizada como:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = \frac{T_N - T_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} = 0 \quad \rightarrow \quad T_N = T_{N-1}$$

ou seja, a condição de derivada nula na posição $x = L$ implica que a variável em no ponto x_N é igual a variável no ponto anterior (x_{N-1}).

2.4 Discretização de PVC's utilizando Diferenças Finitas

A partir das expressões obtidas para aproximar a derivada em um ponto através de expressões algébricas, pode-se transformar um problema de valor de contorno em um conjunto de equações algébricas, sendo que para cada ponto do domínio discreto será

atribuída uma equação. Esta é uma característica importante dos métodos de diferenças finitas: para que a resolução seja possível, deve-se atribuir uma equação para cada ponto do domínio discreto.

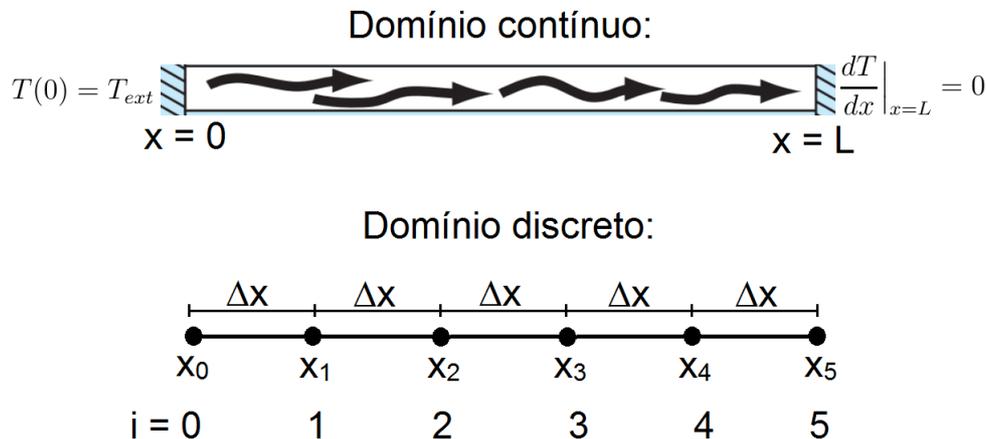
Considere novamente a equação utilizada anteriormente para modelar a transferência de calor em um barra metálica:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Para ilustrar os diferentes tipos de condição de contorno, considere agora que na fronteira $x = 0$ a barra seja mantida a uma temperatura $T = T_{ext}$ e na extremidade $x = L$ a barra esteja isolada, de modo que as condições de contorno neste caso serão:

$$T(0) = T_{ext} \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

onde T_{ext} , h' , T_a e L são constantes. Para discretizar a equação, deve-se primeiramente definir o grid numérico, ou seja, deve-se definir em quantos pontos o domínio de solução contínuo será dividido e como estes pontos estão distribuídos. Neste caso, será assumido que o número de pontos será $N + 1 = 6$ e, por simplicidade, será considerado que os pontos estão igualmente espaçados, portanto o domínio discreto será um conjunto de 6 pontos igualmente espaçados, como ilustrado na figura a seguir.



Como pode ser observado, quando 6 pontos são utilizados, o domínio contínuo é dividido em 5 subdomínios com tamanho Δx , ou seja, $\Delta x = L/5$.

O objetivo do método de diferenças finitas é obter uma aproximação para a temperatura em cada um dos pontos x_i , ou seja, deve encontrar 6 valores T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 . Para isso, é necessário que cada ponto possua uma equação algébrica associada. O

primeiro passo para a resolução é discretizar a equação. Neste caso, a equação possui somente uma derivada segunda que deve ser discretizada. Para isso, será utilizar o esquema de diferenças central:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Além da derivada segunda, a equação também envolve o termo $h'(T_a - T)$. Como h' e T_a são constantes, basta utilizar os seus valores na equação discretizada. Como a expressão anterior é utilizada para avaliar a derivada segunda no ponto x_i , a temperatura T deve ser substituída pela sua equivalente discreta T_i . Assim, a equação discretizada será:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + h'(T_a - T_i) = 0$$

Multiplicando por Δx^2 e agrupando os termos:

$$T_{i+1} + T_{i-1} - (2 + h'\Delta x^2)T_i + \Delta x^2 h' T_a = 0$$

ou ainda:

$$(2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} - T_{i-1} = \Delta x^2 h' T_a$$

Esta relação pode ser utilizada para obter equações para a temperatura em todos os pontos internos, ou seja, para todos os pontos exceto x_0 e x_5 . Assim, para o ponto x_1 temos que:

$$(2 + h'\Delta x^2)T_1 - T_2 - T_0 = \Delta x^2 h' T_a$$

De forma semelhante, para o ponto x_2 :

$$(2 + h'\Delta x^2)T_2 - T_3 - T_1 = \Delta x^2 h' T_a$$

e para os pontos x_3 e x_4 :

$$(2 + h'\Delta x^2)T_3 - T_4 - T_2 = \Delta x^2 h' T_a$$

$$(2 + h'\Delta x^2)T_4 - T_5 - T_3 = \Delta x^2 h' T_a$$

Para estes pontos x_0 e x_5 , deve-se utilizar as condições de contorno. Considerando a primeira condição $T(0) = T_{ext}$, isto resulta em:

$$T_0 = T_{ext}$$

A segunda condição de contorno é dada em termos de derivada nula. Neste caso, é preciso discretizar a condição. Como comentado anteriormente, neste caso somente uma aproximação para trás pode ser utilizada, de modo que:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{T_5 - T_4}{\Delta x} = 0 \quad \rightarrow \quad T_5 - T_4 = 0$$

Isto forma um conjunto de 6 equações lineares que podem ser utilizadas para a obtenção das 6 variáveis T_0, T_1, T_2, \dots . Na forma matricial, estas equações podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (2 + h'\Delta x^2) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (2 + h'\Delta x^2) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (2 + h'\Delta x^2) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & (2 + h'\Delta x^2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ext} \\ \Delta x^2 h' T_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtém-se um sistema linear tridiagonal que pode ser resolvido para obter a temperatura em cada um dos pontos do domínio discreto. Para ilustrar, considere um caso onde $L = 1 \text{ cm}$ (de modo que $\Delta x = L/5 = 0.2 \text{ cm}$), $T_{ext} = 100^\circ \text{C}$, $T_a = 25^\circ \text{C}$ e $h' = 0.1 \text{ cm}^{-2}$. Com isso, o sistema linear pode ser avaliado como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2.004 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2.004 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2.004 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2.004 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver este sistema linear, pode-se utilizar o algoritmo de Thomas (TDMA), como visto em aulas anteriores. Relembrando, este método irá transformar a matriz dos coeficientes em uma matriz triangular superior. Os elementos abaixo da diagonal principal serão zerados e os acima da diagonal principal não serão afetados. Os elementos da diagonal principal (a partir da linha 2) são reavaliados como:

$$a'_{i,i} = a_{i,i} - (a_{i,i-1}/a_{i-1,i-1})a_{i-1,i}$$

De forma semelhante, os termos do lado direito são reavaliados como:

$$b'_i = b_i - (a_{i,i-1}/a_{i-1,i-1})b_{i-1}$$

Assim, o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.004 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.505 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.33955 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2575 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.204759 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100.1 \\ 50.0501 \\ 33.35 \\ 25.0008 \\ 19.8814 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$T[0] = T_0 = 100^\circ C$$

$$T[0.2] = T_1 = 98.83^\circ C$$

$$T[0.4] = T_2 = 97.96^\circ C$$

$$T[0.6] = T_3 = 97.38^\circ C$$

$$T[0.8] = T_4 = 97.09^\circ C$$

$$T[1] = T_5 = 97.09^\circ C$$

Para comparação, a solução exata em cada um destes pontos é:

$$T[0] = T_0 = 100^\circ C$$

$$T[0.2] = T_1 = 98.697^\circ C$$

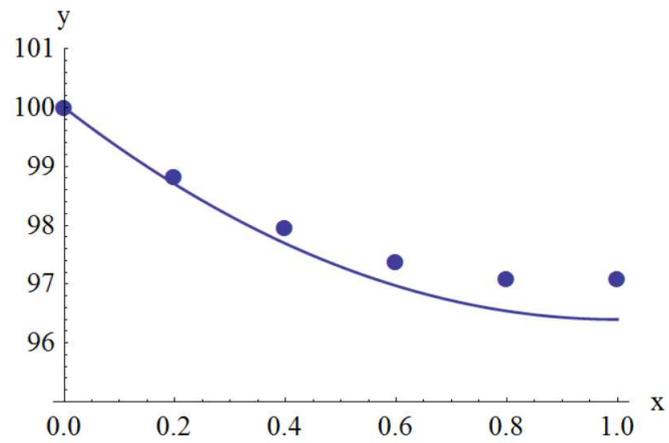
$$T[0.4] = T_2 = 97.689^\circ C$$

$$T[0.6] = T_3 = 96.97^\circ C$$

$$T[0.8] = T_4 = 96.54^\circ C$$

$$T[1] = T_5 = 96.4^\circ C$$

Na figura a seguir é apresentada uma comparação entre a solução exata (linha) e a solução aproximada obtida com o método de diferenças finitas (pontos). Pode-se observar que o desvio é relativamente alto, sendo que um resultado melhor pode ser obtido aumentando-se o número de pontos.



Neste exemplo, a resolução do problema envolveu um sistema linear tridiagonal. Quando o método de diferenças finitas é aplicado a um PVC linear, este sempre será o caso. Quando aplicado em equações não-lineares, o sistema de equações algébricas obtido também será não-linear e deverá ser resolvido com métodos adequados (método de Newton, por exemplo).