Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química II

Lista de Exercícios 07 - Métodos de Runge-Kutta Adaptativos e de Passos-Múltiplos

Prof. Éliton Fontana

1) Utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, obtenha uma aproximação para a solução da seguinte equação de Hermite no intervalo $0 \leq t \leq 1$, considerando $\Delta t = 0.2$. Compare a solução para $y(1)$ com a solução exata e determine o erro associado.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 8y = 0 \quad y(0) = 12 \quad y'(0) = 0$$

R: erro para $y(1) = 25.2\%$

2) Utilize o método de Euler explícito e o método de Runge-Kutta de quarta ordem para obter os valores de $y(1)$ e $z(1)$ utilizando um passo $\Delta x = 0.2$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2y + 4e^{-x} & y(0) &= 2 \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{yz^2}{3} & z(0) &= 4 \end{aligned}$$

R: Euler: $z(1) = 0.9139$, RK4: $z(1) = 1.2429$

3) Através do método de Runge-Kutta de quarta ordem, obtenha $y(1)$ para o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = -4y + e^{-2(t-10)^2} \quad y(0) = 1$$

Utilize o método de passo duplo para adaptar o passo de tempo. Como estimativa inicial, assumo $\Delta t = 0.5$ e considere um erro de truncamento local de $e_{max} = 5 \times 10^{-3}$.

R: $y(1) = 0.02127$

4) Mostre que a utilização de um polinômio de ordem zero $p(x) = A$ para a obtenção dos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton resulta nos métodos de Euler explícito e implícito, respectivamente.

5) Considere o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad y(0) = 1$$

a) Utilize o método de Adams-Bashforth de segunda ordem para estimar a solução até $t = 0.4$, com $\Delta t = 0.1$;

R: $y(0.4) = 1.17021$

b) Estime a solução usando uma abordagem preditiva-corretiva com os métodos de segunda ordem de Adams-Brashforth como preditivo e Adams-Moulton como corretivo;

R: $y(0.4) = 1.17430$

c) Obtenha a solução aproximada utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem;

R: $y(0.4) = 1.17351$

d) Compare os resultados anteriores com a solução exata e discuta os resultados.

6) Utilizando um polinômio de segunda ordem como interpolador, obtém-se os métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de terceira ordem, sendo expressos respectivamente como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$$

Considere o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = 40te^{-y} \quad y(0) = 3$$

Obtenha a solução aproximada até $t = 1$, utilizando $\Delta t = 0.2$, através de uma abordagem preditiva-corretiva com os métodos de Adams-Brashforth como preditivo e Adams-Moulton como corretivo. Compare os valores obtidos com as formulações de primeira, segunda, terceira e quarta ordem. Utilize o método de Runge-Kutta de quarta ordem para estimar os valores iniciais necessários.

R: 1ª ordem: $y(1) = 3.04037$, 2ª ordem: $y(1) = 3.02299$, 3ª ordem: $y(1) = 3.0837$, 4ª ordem: $y(1) = 2.9841$

7) Considere o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = -7y \quad y(0) = 100$$

Utilizando o método de Adams-Bashforth de segunda ordem, obtenha a solução aproximada até $t = 0.5$, utilizando $\Delta t = 0.1$. Compare os resultados obtidos quando os passos iniciais são calculados através dos métodos de Euler explícito e de Runge Kutta de quarta ordem. Avalie a solução exata e determine o desvio para os dois casos.

R: Desvio: 6.27% (Euler), 3.00% (RK4)

8) Faça um esboço de um algoritmo para resolver o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(0) = y_0$$

utilizando uma abordagem preditiva-corretiva com o método de Adams-Bashforth de quarta ordem como preditor e o método de Adams-Moulton de quarta ordem como corretor. Considere $\Delta t = 0.1$ e avalie até um tempo final $t = 100$. Liste todas as hipóteses adotadas.