

Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química II

Lista de Exercícios 06 - Métodos de Runge-Kutta

Prof. Éliton Fontana

1) Obtenha a solução dos seguintes PVI's no intervalo $0 \leq t \leq 0.4$ através dos métodos de Euler explícito e implícito, considerando $\Delta t = 0.1$. Compare os valores obtidos com a solução exata e calcule o desvio:

a) $\frac{dy}{dt} = t^2y + \sin(t) \quad y(0) = \pi$

R: desvios para $t = 0.4$: $y = 1.33\%$ (exp.), 1.495% (imp.)

b) $\frac{dy}{dt} = -5y \quad y(0) = 10$

R: desvios para $t = 0.4$: $y = 53.81\%$ (exp.), 45.95% (imp.)

2) Considere o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = 10 \ln(y) + 3ty^2 \quad y(0) = 1$$

a) Utilize o método Euler aprimorado (Fórmula e Heun) para estimar a solução até $t = 1$, utilizando $\Delta t = 0.25$;

R: $y(1) = 2.14623$

b) Compare o resultado do item (a) com o obtido com o método de Euler modificado com a regra do ponto médio.

R: $y(1) = 2.16306$

3) O método de Runge-Kutta de terceira ordem é definido da seguinte forma:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \Delta t/2, y_n + \Delta tk_1/2)$$

$$k_3 = f(t_{n+1}, y_n - \Delta tk_1 + 2\Delta tk_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (1/6)(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Considere o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = -t\sqrt{y} + 7y \quad y(0) = 4$$

Utilize o método de Euler explícito (1ª ordem), o método de Euler aprimorado (2ª ordem) e os métodos de Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordem para estimar a solução para $t = 0.4$, utilizando $\Delta t = 0.1$. Compare com a solução exata $y(0.4) = 64.687$.

R: $y(0.4) = 33.085$ (Euler exp.), $y(0.4) = 56.3685$ (Euler aprim.), $y(0.4) = 63.2304$ (RK3), $y(0.4) = 64.48745$ (RK4)

4) A reação irreversível onde duas moléculas de dicromato de potássio ($K_2Cr_2O_7$), duas moléculas de água e três átomos de enxofre reagem para formar três moléculas de gás dióxido de enxofre (SO_2), quatro moléculas de hidróxido de potássio sólido (KOH) e duas moléculas de óxido de cromo (Cr_2O_3) pode ser representada estequiometricamente por:



Se n_1 moléculas de $K_2Cr_2O_7$, n_2 moléculas de H_2O e n_3 moléculas de S estão inicialmente disponíveis, a variação na quantidade de KOH ao longo do tempo ($x(t)$) é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = k \left(n_1 - \frac{x}{2} \right)^2 \left(n_2 - \frac{x}{2} \right)^2 \left(n_3 - \frac{3x}{4} \right)^3$$

onde k é a constante de velocidade de reação. Considerando que $k = 6.22 \times 10^{-19}$, $n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$ e $n_3 = 3 \times 10^3$, utilize o método de Runge-Kutta de quarta ordem para determinar quantas unidades de hidróxido de potássio será formada após 0.5 segundos, sendo que inicialmente o sistema está isendo de hidróxido de potássio. Considere $\Delta t = 0.01$. Repita o exemplo utilizando $\Delta t = 0.1$.

R: $x(0.5) = 2356.3$ unidades

5) Obtenha o valor de y para $t = 2$ para o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = (1 + 2t)\sqrt{y} \quad y(1) = 1$$

Utilize um passo $\Delta t = 0.25$ e resolva através dos seguintes métodos:

a) Analiticamente;

R: $y(2) = 9$

b) Método de Euler explícito;

R: $y(2) = 7.02$

c) Método de Heun;

R: $y(2) = 8.831$

d) Método de Ralston;

R: $y(2) = 8.8272$

e) RK4.

R: $y(2) = 8.998$