Aula 05 - Método de Euler

Éliton Fontana

A maior parte das equações diferenciais de interesse na engenharia não possuem solução analítica conhecida. Além disso, em muitos casos as soluções analíticas conhecidas são difíceis de serem utilizadas, por exemplo quando envolvem séries infinitas ou integrais sem resolução analítica. Nestes casos é mais conveniente a utilização de ferramentas numéricas para a resolução das equações.

Existem basicamente três formas de analisar equações diferenciais: através de métodos analíticos, métodos qualitativos e métodos numéricos. Os métodos analíticos permite estabelecer uma relação direta entre as variáveis dependentes e independentes através de funções válidas em um determinado intervalo. Os métodos qualitativos envolvem a análise do comportamento geral da equação sem necessariamente buscar uma solução, como por exemplo através da construção do campo de direções.

Os métodos de resolução numérica permitem que a solução seja estimada para uma dada condição inicial e um conjunto de parâmetros específicos. A ideia geral é de que é possível obter aproximações da solução de uma determinada EDO avançando em pontos que estão a uma distância Δt da condição inicial. Diferentemente dos métodos analíticos, a solução obtida através de métodos numéricos é válida somente para um conjunto de parâmetros específicos e para uma dada condição inicial. Caso esta condição inicial ou algum parâmetro sejam alterados, deve-se resolver o problema novamente.

A determinação de qual forma de análise deve ser utilizada irá depender tanto das características das equações diferenciais que estão sendo avaliadas quanto de que tipo de informação está se buscando.

Assim como para o caso da resolução de sistemas de equações algébricas, existem diversos métodos que podem ser utilizados para a resolução de sistemas de equações diferenciais. Inicialmente será apresentado o método de Euler. Este método costuma ser pouco eficiente para a resolução de sistemas complexos, porém diversos conceitos fundamentais dos métodos de resolução podem ser mais facilmente apresentados através deste método.

1 Método de Euler

O método de Euler é o método mais simples para a aproximação da solução de EDO's. Considere o seguinte problema de valor inicial de primeira ordem:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad\qquad y(t_0) = y_0$$

A solução deste PVI passa obrigatoriamente pelo ponto (t_0, y_0). O objetivo do método de Euler é estimar o valor da solução $y(t)$ em um ponto com uma distância Δt do ponto inicial t_0. Este ponto passa a ser chamado de $t_1 = t_0 + \Delta t$, de modo que o do método de Euler é determina o valor da solução em t_1, $y_1 = y(t_1)$. A partir deste valor, pode-se estimar o valor da função em um ponto t_2 distante Δt do ponto t_1 e continuar com este procedimento até se obter uma aproximação para a solução por quantos pontos forem necessários. Esta classe de métodos são chamados de métodos passo-a-passo. Para avaliar o termo $y_1 = y(t_0 + \Delta t)$, pode-se aplicar uma expansão em séries de Taylor em torno do ponto t_0:

$$y(t_1) = y(t_0 + \Delta t) = y_0 + \Delta t y'(t_0) + \frac{\Delta t^2}{2!} y''(t_0) + \frac{\Delta t^3}{3!} y'''(t_0) + \ldots$$

Considerando que o espaçamento Δt seja muito pequeno, os termos Δt^2, Δt^3, etc. podem ser desprezados. Com isso:

$$y(t_0 + \Delta t) = y_1 \approx y_0 + \Delta t y'(t_0)$$

Considerando também que $y' = f(t, y)$, a relação anterior pode ser reescrita como:

$$y_1 = y_0 + \Delta t f(t_0, y_0)$$

De forma geral, a relação anterior pode ser utilizada para estimar a solução para qualquer valor y_{n+1} com base no valor para y_n:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n)$$

Como o valor no novo ponto y_{n+1} é calculado com base somente em valores no ponto anterior (já conhecidos), este método é dito ***explícito***.

Estrutura de um código para resolver uma EDO $dy/dt = f(t, y)$ utilizando o método de Euler:

Passo 1: Definir $f(t, y)$;

Passo 2: Definir os valores iniciais $t[1] = t_0$, $y[1] = y_0$;

Passo 3: Definir o tamanho do passo Δt e o número de passos n;

Passo 4: Para $i = 1$ até $i = n$ calcular:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t[i], y[i]) \\ y[i+1] &= y[i] + \Delta t \times k_1 \\ t[i+1] &= t[i] + \Delta t \end{aligned} \tag{1}$$

Passo 5: Plotar os resultados.

Exemplo 01): Utilizando o método de Euler, obtenha a solução aproximada até $t = 0.5$ para o seguinte PVI, utilizando $\Delta t = 0.1$:

$$\frac{dy}{dt} = -2t - y \qquad\qquad y(0) = -1$$

Neste caso $f(t, y) = -2t - y$. No ponto inicial temos:

$$t_0 = 0 \qquad\qquad y_0 = -1$$

Como o passo Δt é constante, os valores de t_n são automaticamente definidos, $t_1 = t_0 + \Delta t = 0.1$, $t_2 = t_1 + \Delta t = 0.2, \ldots$

Avaliando $y_1 = y(t_1) = y(0.1)$:

$$y_1 = y_0 + \Delta t f(t_0, y_0) = -1 + 0.1(-2 \times 0 - (-1)) = -0.9$$

Repetindo para os próximos passos:

$$y_2 = y_1 + \Delta t f(t_1, y_1) = -0.9 + 0.1(-2 \times 0.1 - (-0.9)) = -0.83$$

$$y_3 = y_2 + \Delta t f(t_2, y_2) = -0.83 + 0.1(-2 \times 0.2 - (-0.83)) = -0.787$$

$$y_4 = y_3 + \Delta t f(t_3, y_3) = -0.787 + 0.1(-2 \times 0.3 - (-0.787)) = -0.7683$$

$$y_5 = y_4 + \Delta t f(t_4, y_4) = -0.7683 + 0.1(-2 \times 0.4 - (-0.7683)) = -0.77147$$

Para comparação, a solução exata da equação diferencial é:

$$y(t) = -3e^{-t} - 2t + 2$$

sendo que para os pontos avaliados a solução exata é:

$$y_0 = -1 \qquad y_1 = -0.9145 \qquad y_2 = -0.85619 \qquad y_3 = -0.8224$$

$$y_4 = -0.8109 \qquad y_5 = -0.81959$$

Exemplo 02): Utilizando o método de Euler, obtenha a solução aproximada para $t = 1$ para o seguinte PVI, utilizando $\Delta t = 0.2$:

$$\frac{dy}{dt} = 2t^2y^2 \qquad\qquad y(0) = 1$$

Com base nos dados fornecidos, $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$. Como $\Delta t = 0.2$, temos que $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0.4$, $t_3 = 0.6$, $t_4 = 0.8$ e $t_5 = 1$. Avaliando os termos intermediários:

$$y_1 = y_0 + 0.2 \cdot (2 \cdot t_0^2 y_0^2) = 1 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0^2 \cdot 1^2) = 1$$

$$y_2 = y_1 + 0.2 \cdot (2 \cdot t_1^2 y_1^2) = 1 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0.2^2 \cdot 1^2) = 1.016$$

$$y_3 = y_2 + 0.2 \cdot (2 \cdot t_2^2 y_2^2) = 1 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0.4^2 \cdot 1.016^2) = 1.0821$$

$$y_4 = y_3 + 0.2 \cdot (2 \cdot t_3^2 y_3^2) = 1 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0.6^2 \cdot 1.0821^2) = 1.2507$$

$$y_5 = y_4 + 0.2 \cdot (2 \cdot t_4^2 y_4^2) = 1 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0.8^2 \cdot 1.2507^2) = 1.6511$$

A solução exata em $t = 1$ é $y(1) = 3$, portanto a solução obtida está com um erro significativo. Por este exemplo, fica claro que é fundamental avaliar os erros associados à utilização do método de Euler.

1.1 Erro Associado ao Método de Euler

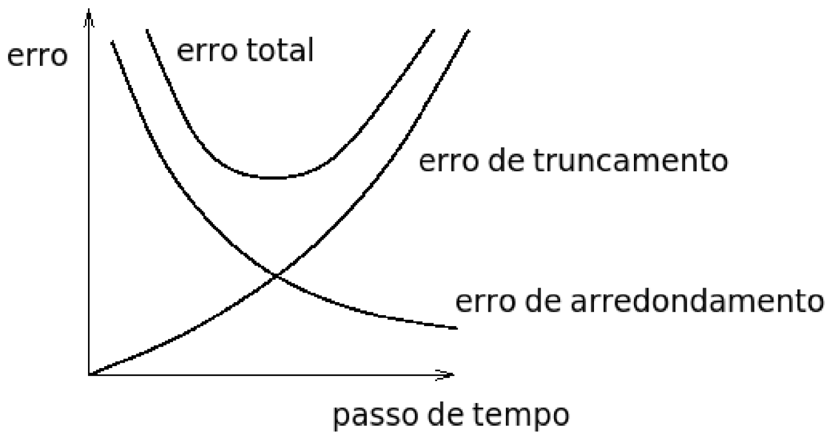
A utilização de métodos numéricos sempre leva à obtenção de *soluções aproximadas*. Uma importante propriedade dos métodos numéricos é a **convergência**. Um método é dito convergente quando a solução obtida tende à solução exata quando o espaçamento $\Delta t \to 0$.

Na resolução de EDO's pelo método de Euler (ou por qualquer outro método), existem duas fontes de erros:

- Erros de truncamento: erros associados com o truncamento da expansão em série de Taylor no segundo termo. Como a determinação do ponto y_{n+1} depende do valor de y_n, o erro de truncamento pode aumentar rapidamente ao longo da resolução. Para reduzir os erros de truncamento, pode-se reduzir o passo de tempo Δt.

- Erros de arredondamento: erro associado à precisão dos valores numéricos utilizados (número de dígitos significativos: 6-9 para precisão única e 15-17 para precisão dupla). Quanto maior for o número de operações necessárias, maior será o erro de arredondamento. Assim, uma maneira de reduzir este erro é aumentar o passo de tempo, de modo que menos passos precisam ser resolvidos para atingir o tempo desejado.

Dessa forma, conforme o passo de tempo aumenta, o erro de arredondamento diminui e o de truncamento aumenta. Por isso, existe um ponto ótimo onde o erro total é mínimo, como ilustrado na figura a seguir. Usualmente os erros de arredondamento são menos significativos, por isso a tendência é que passos pequenos gerem melhores resultados.



Como visto anteriormente, pode-se obter o valor de uma função $y(t)$ em um ponto t_{n+1} com base no valor em t_n através de uma expansão em séries de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\, y'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} y''(t_n) + \frac{\Delta t^2}{3!} y'''(t_n) + \dots$$

A diferença entre o valor exato de y_{n+1} e o valor aproximado obtido com o uso do método de Euler corresponde ao erro local de truncamento (para um determinado valor de n):

$$e_{n+1} = \frac{\Delta t^2}{2!} y''(t_n) + \frac{\Delta t^2}{3!} y'''(t_n) + \dots$$

Nesta forma, o erro ainda representa uma série infinita. Para evitar este problema, pode-se utilizar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\, y'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} y''(c)$$

onde $c \in [t_n, t_{n+1}]$. Este resultado é uma extensão do teorema do valor médio, que diz que dada uma função contínua f definida num intervalo fechado [a,b] e diferenciável em (a,b), existe algum ponto c em (a,b) tal que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Utilizando a relação anterior, o erro e_{n+1} pode ser avaliado como:

$$e_{n+1} = \frac{y''(c)}{2}\Delta t^2$$

Como $y''(c)$ é uma constante (valor finito), temos que:

$$e_{n+1} = O(\Delta t^2)$$

ou seja, o erro local é da ordem de Δt^2.

Como cada passo gera um erro local, quanto mais passos forem utilizados, maior será o acúmulo de erros. Por isso, quando o valor y_{n+1} estiver sendo determinado, o erro associado à determinação do valor de y_n também deve ser considerado. Para n passos, o erro global E_n pode ser avaliado como:

$$E_{n+1} = e_{n+1} \cdot n = O(h^2) \cdot n = O(h^2)\frac{n \cdot h}{h} = O(h)t_n$$

onde $h = \Delta t$. Novamente, como t_n é um escalar:

$$E_{n+1} = O(h)$$

Assim, o erro global no método de Euler é da ordem do tamanho do passo utilizado. Esta relação mostra que o erro tende a zero conforme $h \to 0$ e portanto o método é convergente. De forma geral, um dado método é convergente quando:

$$E_{n+1} = O(h^p) \qquad\qquad p > 0$$

Neste caso, o método possui ordem p, portanto, o método de Euler é um método de primeira ordem. Métodos de ordem superior convergem mais rapidamente para a solução exata (não exigem passos tão pequenos), sendo por isso mais indicados que os métodos de primeira ordem.

A utilização de um passo muito pequeno (tendendo a zero) é impraticável, pois exigiria um tempo computacional demasiadamente alto, além de fazer com que os erros de arredondamento aumentassem rapidamente. Um procedimento simples que pode na maioria dos casos ser utilizado para determinar se o passo utilizado é adequado é resolver o problema com valores de Δt gradativamente menores. A partir de um determinado ponto as soluções obtidas serão muito parecidas, sendo que uma maior redução em Δt a partir deste ponto não irá reduzir o erro global de forma significativa e irá aumentar o erro de arredondamento.

1.2 Método de Euler para Sistemas de EDO's

O método de Euler explícito pode ser estendido para aplicação em sistemas de EDO's de primeira ordem. Considere o seguinte sistema de PVI's:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,y) & \qquad x(0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= g(t,x,y) & \qquad y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

De forma semelhante ao realizado para uma única equação, pode-se partir das condições iniciais e ir avançando ao longo de t com base nos valores já conhecidos:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot f(t_n, x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot g(t_n, x_n, y_n)$$

Generalizando para um sistema de m equações da forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= f_1(t, y^1, y^2, y^3, \ldots, y^m) & \qquad y^1(t_0) &= y_0^1 \\ \frac{dy^2}{dt} &= f_2(t, y^1, y^2, y^3, \ldots, y^m) & \qquad y^2(t_0) &= y_0^2 \\ \frac{dy^3}{dt} &= f_3(t, y^1, y^2, y^3, \ldots, y^m) & \qquad y^3(t_0) &= y_0^3 \\ &\vdots & &\vdots \\ \frac{dy^m}{dt} &= f_m(t, y^1, y^2, y^3, \ldots, y^m) & \qquad y^m(t_0) &= y_0^m \end{aligned} \tag{2}$$

A utilização do método de Euler explícito implica em:

$$\begin{bmatrix} y_{n+1}^1 \\ y_{n+1}^2 \\ y_{n+1}^3 \\ \vdots \\ y_{n+1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ y_n^3 \\ \vdots \\ y_n^m \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} f_1(t_n, y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^m) \\ f_2(t_n, y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^m) \\ f_3(t_n, y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^m) \\ \vdots \\ f_m(t_n, y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^m) \end{bmatrix} \tag{3}$$

A aplicação do método para resolução de sistemas também permite que ele seja utilizado para a resolução de equações de ordem maior que 1. Por exemplo, considere o seguinte PVI:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad y(0) = y_0 \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = y_1$$

Esta equação pode ser transformada em um sistema de primeira ordem através da definição de uma variável adicional u:

$$u = \frac{dy}{dx} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$$

Com isso, o PVI pode ser reescrito como:

$$\frac{dy}{dx} = u \qquad y(0) = y_0$$
$$\frac{du}{dx} = f(x, y, u) \qquad u(0) = y_1$$

Este procedimento pode ser aplicado para escrever uma EDO de qualquer ordem como um sistema de EDO's de primeira ordem.

Exemplo 03: Utilizando o método de Euler, obtenha a solução aproximada para os três primeiros passos de tempo para o seguinte sistema, considerando $\Delta t = 0.1$:

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad x(0) = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = x\sqrt{y} + 3y \qquad y(0) = 2$$

Desse modo, $f(t, x, y) = y$ e $g(t, x, y) = x\sqrt{y} + 3y$.

Exemplo 04: Determine o valor de $y(t)$ em $t = 0.2$ utilizando como passo de tempo $\Delta t = 0.1$:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sqrt{x}\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2 \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 1$$

Definindo das variáveis adicionais:

$$u = \frac{dy}{dx} \qquad v = \frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Com isto, a equação anterior é retomada como:

$$\frac{du}{dx} = v \qquad u(0) = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = u \qquad y(0) = 0$$
$$\frac{dv}{dx} + \sqrt{x}v + 3y = 0 \qquad v(0) = 1$$