Método das Linhas

O método das linhas é um método semi-discreto para a resolução de EDP's que consiste em discretizar as variáveis espaciais e manter uma das varáveis contínua (usualmente o tempo), de modo a transformar a EDP em um sistema de EDO's que pode então ser resolvido através dos métodos para a resolução de PVI's (como os métodos de Runge-Kutta). A abordagem utilizada para a discretização das variáveis espaciais usualmente é o método de diferenças finitas, por isso o método das linhas é muitas vezes chamado de método de diferenças finitas semi-discreto.

Este método é aplicado principalmente para equações parabólicas, pois sua aplicação em equações elípticas origina um conjunto de PVC's, o que por sua vez também precisam ser resolvido por métodos de discretização. Quando aplicado em equações parabólicas, a variável onde a informação se propaga somente em uma das direções (como por exemplo o tempo) é mantida contínua enquanto as demais são discretizadas.

Por exemplo, considere a equação do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Para obter uma solução particular para esta equação, é preciso especificar duas condições de contorno e uma condição inicial. Considere, por exemplo, as seguintes condições:

$$T(0,t) = T_a \qquad T(L,t) = T_b \qquad T(x,0) = \sin(x)$$

Neste caso, pode-se discretizar a derivada em relação à direção x. Usando um esquema central:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Substituindo esta forma discreta na EDP, obtém-se um sistema de EDO's para avaliar a variação temporal das variáveis T_i:

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}\right)$$

A aplicação das condições de contorno vão resultar em valores específicos para a variável T_i nas extremidades $x = 0$ e $x = L$ que serão válidos para qualquer tempo, visto que estas condições são fixas. A condição $T(0,t) = T_a$ vai resultar em $T_1 = T_a$, enquanto que a condição $T(L,t) = T_b$ vai resultar em $T_N = T_b$, onde N é o número total de pontos utilizados para discretizar o domínio de solução na direção x.

Para resolver este sistema de EDO's para os i pontos, é preciso especificar condições iniciais para cada valor T_i. Como a variável T_i representa a temperatura na posição x_i, o valor inicial pode ser obtido diretamente da condição inicial especificada anteriormente aplicada no ponto x_i. A condição inicial era da forma:

$$T(x,0) = \sin(x)$$

Assim, para cada variável T_i teremos uma condição inicial associada da forma:

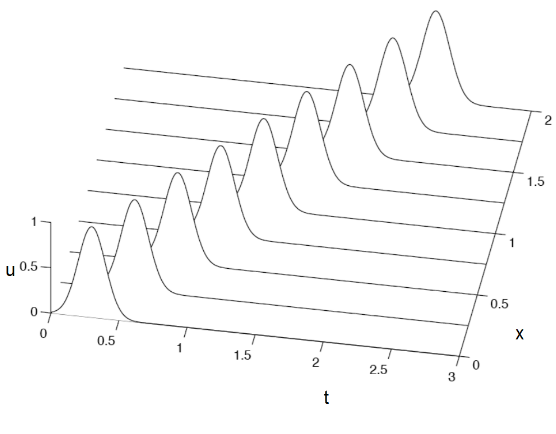
$$T_i(0) = \sin(x_i)$$

onde:

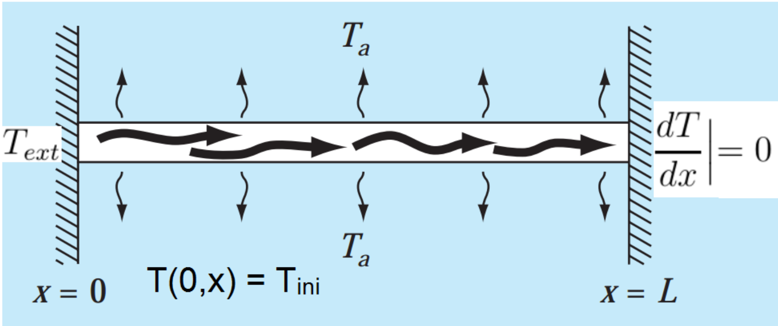
$$x_i = (i-1)\Delta x \qquad\qquad \Delta x = L/(N-1)$$

Observe que enquanto a temperatura é uma função da posição e do tempo ($T(x,t)$), as variáveis T_i são funções apenas do tempo $T_i(t)$, pois representam a temperatura em um ponto fixo x_i. A aplicação do método das linhas vai originar uma série de curvas (daí o nome método das linhas), contínuas em relação ao tempo, que representam como a temperatura varia em cada ponto x_i.

A figura a seguir ilustra a forma da solução de uma EDP (não se trata da mesma EDP do exemplo anterior) com duas variáveis independentes obtida com o método das linhas.



Para ilustrar a aplicação do método das linhas, considere que é necessário obter a variação de temperatura ao longo de uma barra metálica com uma extremidade isolada e outra mantida a uma temperatura T_{ext} e que perde calor para o meio externo por convecção. Considere que se deseja obter como a temperatura varia ao longo do tempo a partir de um estado inicial $T(x, 0) = T_{ini}$.



A equação que descreve a variação na temperatura ao longo da posição x e do tempo t neste caso será:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h'\alpha(T - T_a)$$

As condições de contorno associadas a este problema são:

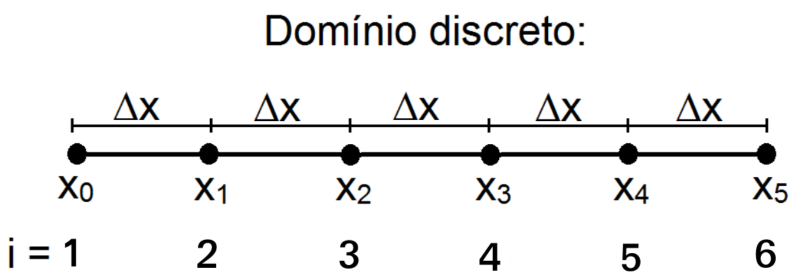
$$T(0, t) = T_{ext} \qquad\qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

Além disso, a condição inicial utilizada é da forma:

$$T(x, 0) = T_{ini}$$

De forma geral, as condições de contorno podem ser função do tempo, da mesma forma que a condição inicial pode ser uma função de x.

Para resolver esta equação com o método das linhas, é preciso discretizar a equação na direção espacial e manter a função contínua no tempo. Assim, deve-se definir um domínio discreto na direção x. Neste caso, será considerado um domínio somente com $N = 6$ pontos para ilustração:



Neste caso, a discretização da EDP na direção x irá resultar um conjunto de valores $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ que representam a temperatura nos pontos respectivos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

Neste caso, porém, estes valores T_i não são constantes, mas podem ser uma função do tempo.

A EDP avaliada neste exemplo envolve a derivada segunda em relação a direção x, então deve-se discretizar esta derivada. Considerando um esquema central, a derivada segunda nos pontos x_i são dadas por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Substituindo na EDP, obtém-se:

$$\frac{dT_i}{dt} = \alpha \left(\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) - h'\alpha(T_i - T_a)$$

Esta equação pode ser aplicada nos pontos $i = 2, 3, 4, 5$ para obter uma EDO para a temperatura em cada um destes pontos. Para resolver este sistema de EDO's, é preciso definir uma condição inicial para cada ponto. Como a temperatura inicial é considerada constante e igual a T_{ini}, basta associar este valor com a temperatura em cada ponto:

$$T_i(0) = T_{ini}$$

Para fechar o sistema de equações, é preciso ainda definir equações para T_0 e T_6, que são obtidas através da aplicação das condições de contorno. A condição $T(0,t) = T_{ext}$ resulta diretamente em:

$$T_1 = T_{ext}$$

Assim, obtém-se uma equação para a temperatura na extremidade $x = 0$. Na extremidade $x = L$, a condição é de derivada nula. Neste caso pode-se aplicar um esquema de discretização para trás, de onde se obtém que $T_6 = T_5$. Com estas duas condições extras, o sistema de EDO's pode ser resolvido.

De forma resumida, as equações para os 6 pontos são:

$$T_1 = T_{ext}$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \alpha \left(\frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{(\Delta x)^2} \right) - h'\alpha(T_2 - T_a) \qquad T_2(0) = T_{ini}$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \alpha \left(\frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{(\Delta x)^2} \right) - h'\alpha(T_3 - T_a) \qquad T_3(0) = T_{ini}$$

$$\frac{dT_4}{dt} = \alpha \left(\frac{T_5 - 2T_5 + T_3}{(\Delta x)^2} \right) - h'\alpha(T_4 - T_a) \qquad T_4(0) = T_{ini}$$

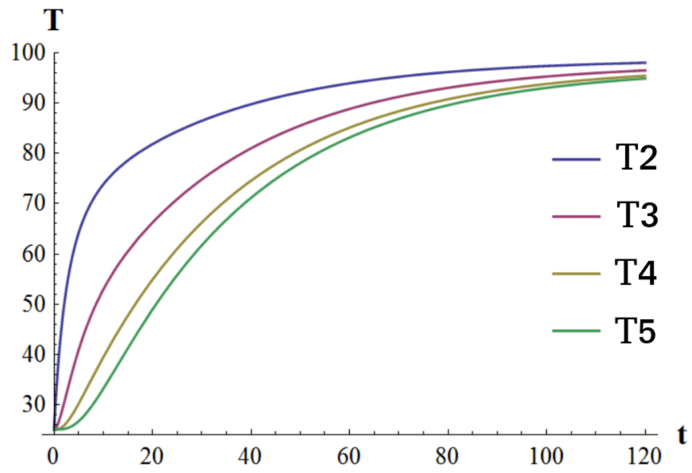
$$\frac{dT_5}{dt} = \alpha \left(\frac{T_6 - 2T_5 + T_4}{(\Delta x)^2} \right) - h'\alpha(T_5 - T_a) \qquad T_5(0) = T_{ini}$$

$$T_6 = T_5$$

As equações para $i = 2, 3, 4, 5$ formam um sistema de PVI's que pode ser resolvido por algum dos métodos vistos anteriormente para a resolução de PVI's, como os métodos de Runge-Kutta.

Considere, por exemplo, um caso onde $L = 1\,cm$ ($\Delta x = 0.2\,cm$), $T_{ext} = 100°C$, $T_a = 25°C$ e $h' = 0.1\,cm^{-2}$. Além disso, considere que $\alpha = 0.01\,cm^2/s$ e $T_{ini} = 25°C$. Neste caso, a barra metálica está inicialmente na mesma temperatura que o ambiente externo. Em um dado instante, a temperatura na extremidade $x = 0$ é aumentada para $100°C$.

Resolvendo o sistema de equações utilizando Runge-Kutta de quarta ordem, obtém-se as curvas apresentadas na figura a seguir.



Pode-se observar que para altos valores de tempo as temperaturas tendem a um valor específico, ou seja, tendem para um valor estacionário. Estes valores correspondem exatamente aos obtidos para a resolução do caso onde o comportamento transiente é desprezado.