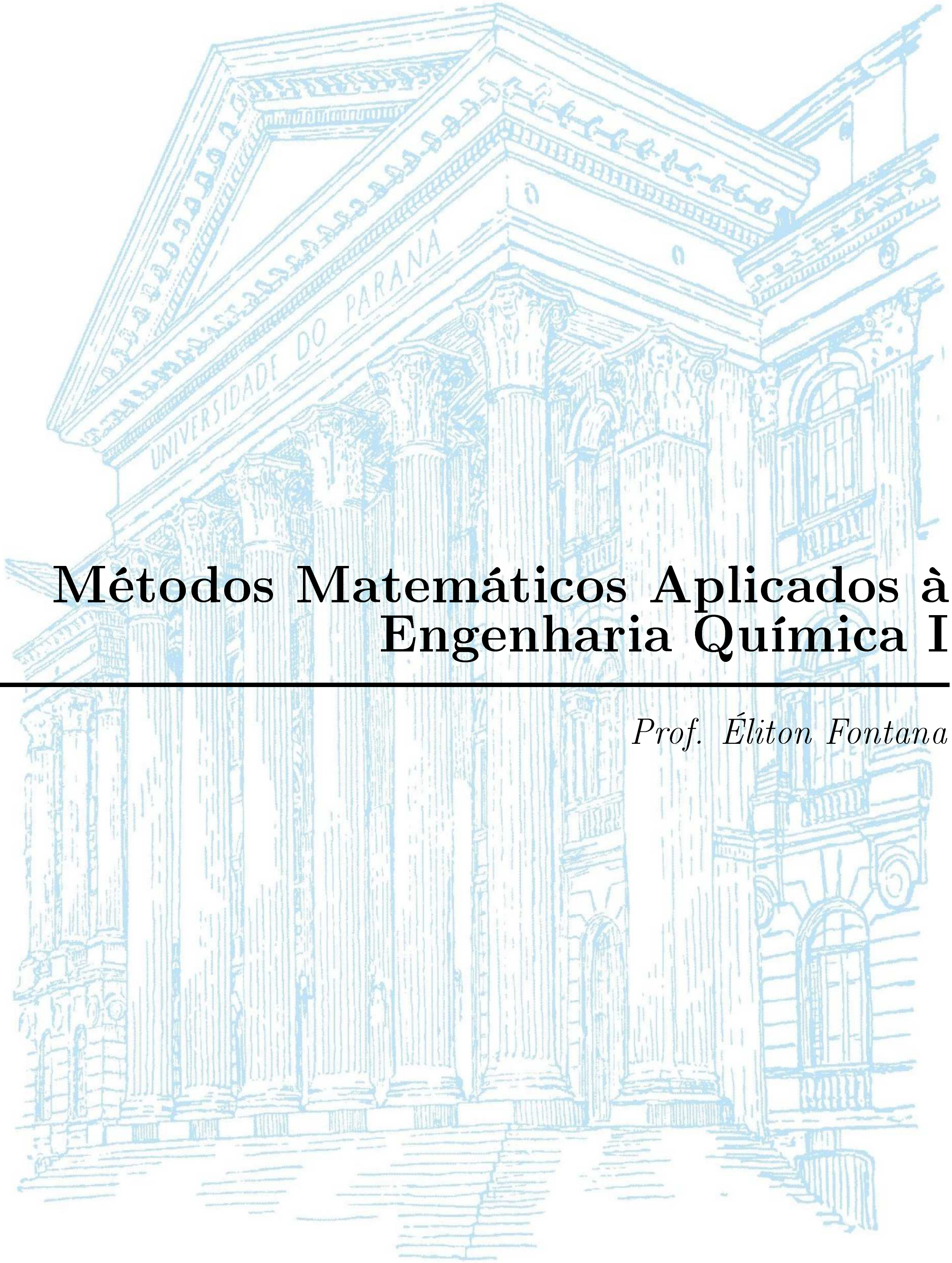
Universidade Federal do Paraná – UFPR

Departamento de Engenharia Química



Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química I

Prof. Éliton Fontana

2020/1

Este material foi desenvolvido como complemento para a disciplina de Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química I. Devido à falta de atenção ou de conhecimento do autor, eventuais erros podem estar presentes ao longo do texto.

Diversos autores serviram de base para a elaboração deste material, sendo em muitos casos trechos e exercícios copiados de forma direta. Infelizmente, ao longo do desenvolvimento estas referências se perderam no tempo como lágrimas na chuva... De qualquer forma gostaria de destacar alguns livros que foram fundamentais para o material apresentado a seguir:

- W. E. Boyce e R. C DiPrima (Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno): Sem dúvida o mais utilizado. Excelente material para iniciar o estudo de equações diferenciais, além de cobrir praticamente todos os tópicos da disciplina.

- E. Kreyszig (Advanced Engineering Mathematics), A. Jeffrey (Advanced Engineering Mathematics) e M. D. Greenberg (Advanced Engineering Mathematics): três livros com o mesmo título, mas com abordagens diferenciadas. Apresentam os tópicos de forma mais resumida, com excelentes exercícios (em particular o Kreyszig).

Sumário

1. Conceitos Básicos

1.1. Introdução

Uma equação algébrica representa uma igualdade entre duas funções, podendo conter uma ou mais *variáveis* desconhecidas. A resolução de equações algébricas implica em encontrar os *valores* que satisfaçam a igualdade. Por exemplo:

$$z^3 + z = 2 \qquad\qquad y^2 + x^2 = 1$$

Pode-se determinar valores de x, y e z que satisfaçam as igualdades.

Uma equação diferencial envolve alguma igualdade entre termos contendo a derivada de uma ou mais *funções* desconhecidas em relação a uma ou mais variáveis. A resolução das equações diferenciais consiste em encontrar as funções que satisfaçam a igualdade. Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 3x = 1 \qquad\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

A solução da primeira equação diferencial será da forma $y = f(x)$ e da segunda será da forma $T = f(x, y)$. Assim como para as equações algébricas, uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais pode não possuir solução, possuir solução única ou possuir várias soluções.

Uma equação diferencial contém ***variáveis dependentes*** e ***variáveis independentes***. As variáveis dependentes representam as funções que possuem derivadas presentes na equação, enquanto que as variáveis independentes representam em relação ao quê estas derivadas são avaliadas.

Por exemplo, considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 3y + t$$

Esta equação possui uma variável dependente (y) e uma independente (t). Assim, a solução da equação será uma função do tipo $y = y(t)$. Uma mesma equação pode possuir diversas variáveis depententes e independentes. Normalmente, as variáveis dependentes representam quantidades físicas que se deseja determinar, como por exemplo a temperatura de um sistema, velocidade, concentração de espécies químicas, indivíduos em uma população, etc. Em contrapartida, as variáveis independentes mais comuns em problemas de engenharia são o tempo e as coordenadas espaciais.

As equações diferenciais com formato similar à equação anterior podem ser expressas como:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

A princípio, pode-se imaginar que esta equação não possui solução, já que se trata de uma única equação com duas variáveis y e t. No entanto, deve-se lembrar que y é uma *função* de t, ou seja, y depedende de t (por isso é chamada de variável dependente). Em muitos casos, é conveniente explicitar esta dependência, escrevendo a relação anterior como:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

Considere agora a seguinte equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

onde α é uma constante. Neste caso, a equação possui uma variável dependente (T) e duas independentes (t e x). A solução será uma função de duas variáveis do tipo $T = f(t, x)$. A constante α atua como um ***parâmetro*** da equação.

1.2. Classificação das Equações Diferenciais

As equações diferenciais são classificadas de acordo com suas características. Esta classificação é essencial para a determinação dos métodos de análise mais adequados para cada equação.

1.2.1. Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Parciais (EDP)

Quando a função desconhecida depende somente de uma variável independente a equação é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO). Por exemplo:

$$4\frac{d^2y}{dt^2} + \sin(t)\frac{dy}{dt} = e^t$$

De forma genérica, uma EDO pode ser expressa como:

$$f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Caso a variável dependente dependa de duas ou mais variáveis, a equação é classificada como Equação Diferencial Parcial (EDP). Por exemplo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

1.2.2. Ordem

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \text{segunda ordem}$$

$$\frac{dy}{dt} + y^3 = 0 \qquad \text{primeira ordem}$$

A ordem da equação não está relacionada com a maior potência na qual a variável está elevada.

1.2.3. Linearidade

Uma equação algébrica é dita linear quando pode ser escrita da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots a_nx_n + b = 0$$

ou seja, quando as variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$ não aparecem em termos não-lineares.

De forma semelhante, a equação diferencial ordinária

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

é dita linear se F é uma função linear em relação à variável dependente e suas derivadas $(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$.

Isto implica que uma EDO **linear** pode ser escrita da forma:

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \ldots + a_0(t)y = g(t)$$

ou seja, a variável y ou suas derivadas não estão presentes em termos não-lineares, como por exemplo produto entre a variável e as derivadas, y^n com $n \neq 1$ e funções não lineares contendo a variável y (funções trigonométricas, exponencial, etc.). A variável independente (t) pode estar presente em termos não-lineares. Exemplos de equações lineares:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = 0 \qquad \frac{dy}{dt} + t^2y = \sin(t) \qquad \frac{dy}{dt} - ye^t = 0$$

Quando as equações não podem ser expressas da forma apresentada anteriormente são consideradas não-lineares. As equações diferenciais não-lineares possuem em geral uma resolução muito mais complexa e por isso são mais difíceis de serem avaliadas analiticamente. Exemplos de equações não-lineares:

$$\frac{dy}{dt} + y^2 = 0 \qquad y\frac{dy}{dt} = t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \sin(y) \qquad \frac{dy}{dt} + te^y = 0$$

De forma similar, uma EDP é dita não-linear quando possui algum termo não linear envolvendo qualquer variável dependente.

As EDO's lineares ainda podem ser divididas em outras categorias que são utilizadas para facilitar a escolha dos métodos de solução:

1.2.4. Homogeneidade

Uma equação diferencial do tipo

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

é homogênea quando o termo associado somente à variável independente é nulo. Na forma apresentada anteriormente para as EDO's lineares, a equação é homogênea quando $g(t) = 0$. Caso algum termo diferente de zero não estiver multiplicado pela variável dependente (y) ou alguma de suas derivadas, a equação é dita não-homogênea;

1.2.5. Coeficientes constantes e variáveis

Esta classificação costuma ser empregada somente para EDO's. Na expressão para uma EDO genérica vista anteriormente, os coeficientes $a_n(t), a_{n-1}(t)...a_0(t)$ podem ser funções conhecidas da variável independente t. No entanto, caso estes coeficientes sejam constantes (não dependam de t) a equação é conhecida como EDO com coeficientes constantes, caso contrário é chamada de EDO com coeficientes variáveis.

Uma classe de equações muito importante nas ciências exatas são as equações autônomas. Estas equações surgem quando a variável independente não aparece de forma explícita na equação.

Exercício 1: Classifique as seguintes equações diferenciais de acordo com os critérios vistos anteriormente:

$$a)\frac{dy}{dt} = t^2y + 2 \qquad\qquad b)\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

$$c)\frac{dy}{dt} = y^2(1+t) \qquad\qquad d)\frac{d^3y}{dt^3} = 2\frac{dy}{dt} + ty + e^t$$

Exercício 2: Escreva a forma geral para uma equação diferencial com as seguintes características:

a) EDO de primeira ordem linear;

$$\mathbf{R}: \qquad \frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

b) EDO de segunda ordem;

$$\mathbf{R}: \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + f\left(\frac{dy}{dt}, y, t\right) = 0$$

c) EDO de segunda ordem linear, não-homogênea e com coeficientes variáveis.

$$\mathbf{R}: \qquad a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = d(t)$$

Lista de Exercícios - Classificação de equações diferenciais

1) Classifique as seguintes equações diferenciais em relação ao tipo (ordinária ou parical), ordem, linearidade e homogeneidade.

$a)\dfrac{dy}{dt} = y^2 - t$

$b)\dfrac{dy}{dt} = e^{2/y}$

$c)e^y\dfrac{dy}{dt} + t^2y^2 = 0$

$d)\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y}{t^2} = 2te^{1/t}$

$e)\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 5y$

$f)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2+y}{1+x}$

$g)x^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + t^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

$h)\dfrac{dy}{dx} = e^{ix} + 2$

2. Modelagem de Sistemas Físicos

2.1. Campo de Direções

Do ponto de vista geométrico, a derivada de uma função $y(t)$ representa a inclinação da reta tangente à função em cada ponto. Considere uma equação de primeira ordem do tipo:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

A princípio, as soluções $y(t)$ da equação diferencial não são conhecidas. Porém, sabe-se que a inclinação da reta tangente à solução em qualquer ponto (t_1, y_1) vai ser $f(y_1, t_1)$, já que este é o valor da derivada neste ponto.

O campo de direções é construído calculando-se $f(y, t)$ para diversos pontos em um intervalo de y e t. Em cada ponto, desenha-se uma reta (ou seta) cujo coeficiente angular é o valor de $f(y, t)$ naquele ponto.

Por exemplo, considere a equação:

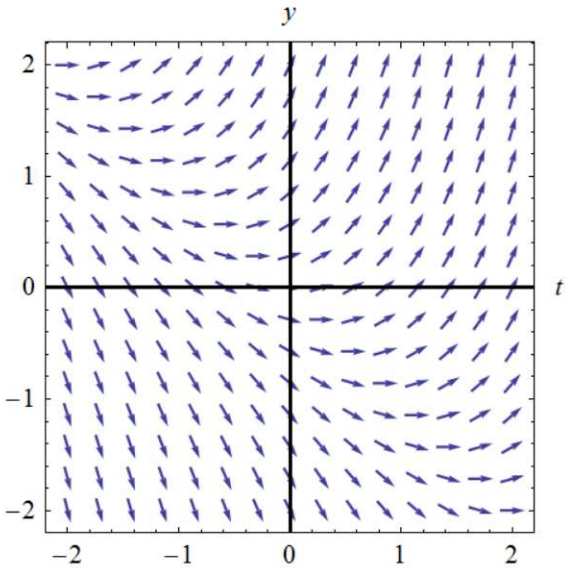
$$\frac{dy}{dt} = y + t$$

Avaliando a inclinação da reta tangente para diversos valores de y e t no intervalo de -2 a 2 para as duas variáveis, obtém-se o campo de direções apresentado a seguir.

O comando utilizado para plotar o campo de direções anterior no Mathematica foi o seguinte:

É importante observar que para construir o campo de direções, não é preciso resolver a equação diferencial, bastando avaliar $f(y, t)$ em diversos pontos.

Como a derivada de $y(t)$ representa a inclinação da reta tangente à função em um dado ponto, as retas traçadas no campo de direções devem ser tangentes às soluções $y(t)$. Assim, avaliando-se para um número muito grande de pontos, pode-se obter as soluções da equação diferencial que passam por um determinado ponto, o que implica que o campo de direções



f(t,y) — intervalo dos eixos — comando para normalizar todos os vetores com o mesmo tamanho

```
VectorPlot[{1, t + y}, {t, -2, 2}, {y, -2, 2}, VectorScale → {Tiny, 1, None},
 Axes → True, AxesStyle → Thickness[0.0075], AxesLabel → {t, y}]
```

opções dos eixos, aparência e títulos

de uma equação diferencial é uma representação gráfica da trajetória das soluções desta equação.

Como pode ser visto, existem infinitos caminhos ao longo do campo de direções, portanto, existem infinitas possíveis soluções. Normalmente, a resolução de problemas com interesse físico envolve a especificação de uma solução em particular que atenda a uma condição específica. Por exemplo, se y representa a concentração de uma determinada espécie em um reator, sabe-se que em algum instante inicial esta concentração deve corresponder a um valor conhecido (valor presente na corrente de alimentação, por exemplo). Portanto, a solução que se está buscando, além de satisfazer as equações que descrevem o processo, deve satisfazer uma condição inicial específica, ou seja, deve passar por um ponto (t_0, y_0) conhecido.

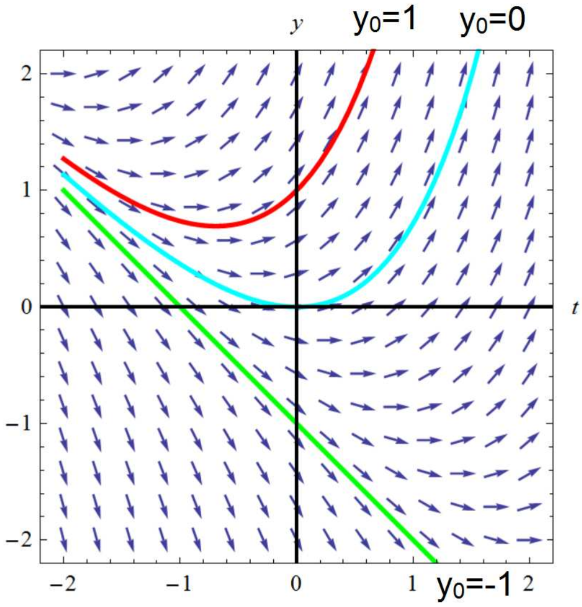
O conjunto de uma equação diferencial com uma condição inicial específica é chamado de ***Problema de Valor Inicial (PVI)***, podendo ser expresso de forma geral como:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad\qquad y(t_0) = y_0$$

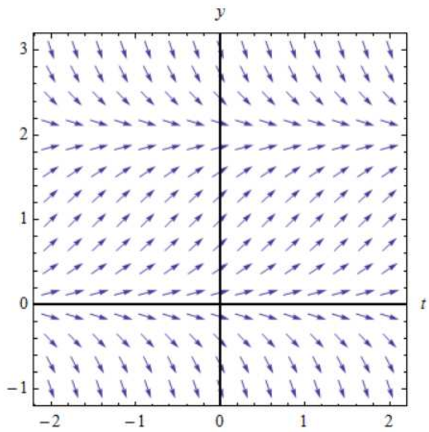
Considere novamente o exemplo anterior:

$$\frac{dy}{dt} = y + t$$

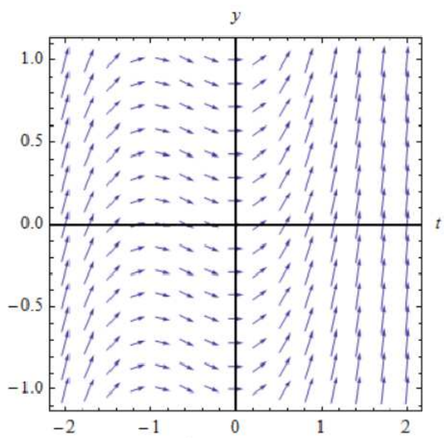
Porém, suponha que se deseja obter uma solução que satisfaça a condição $y(0) = y_0$, onde $y_0 \in \Re$. Pode-se buscar no campo de direções a trajetória que passa por este ponto e traçar a solução correspondente. Na figura a seguir são ilustrados os casos para $y_0 = 1$, $y_0 = 0$ e $y_0 = -1$.



Quando a equação diferencial é da forma $dy/dx = f(y)$ (equação autônoma), o campo de direção será composto por retas paralelas ao longo do eixo x, enquanto que quando $dy/dx = f(x)$, o campo será composto por retas paralelas em y, como ilustrado nos exemplos a seguir.



$$\frac{dy}{dt} = y(2-y)$$



$$\frac{dy}{dt} = t^2 + t$$

Exemplo 2: Faça um esboço do campo de direções das seguintes Equações Diferenciais e determine o valor da solução conforme $t \to \infty$:

$$a)\frac{dy}{dt} = t \qquad\qquad b)\frac{dy}{dt} = 2y - 3$$

$$c) \frac{dy}{dt} = \sin(t) \qquad\qquad d) \frac{dy}{dt} = e^t$$

2.2. Modelos Matemáticos

Um modelo matemático de um determinado processo físico é uma descrição deste processo através de um conjunto de equações (algébricas e/ou diferenciais). Os modelos matemáticos podem ser usados para prever o comportamento do sistema estudado.

Os modelos de problemas na engenharia envolvem princípios de conservação ou leis físicas conhecidas que descrevem como alguma variável dependente varia em função de uma ou mais variáveis independentes. Por exemplo, pode-se aplicar os princípios de conservação de energia para determinar como a temperatura varia ao longo do comprimento de um material. Conhecendo-se condições em fronteiras específicas, pode-se determinar a temperatura em qualquer ponto do sistema.

A construção de modelos matemáticos é uma parte fundamental em diversas áreas do conhecimento além da engenharia, como por exemplo na biologia, meteorologia, economia, ciências da computação, ciências sociais, etc. Devido ao avanço na capacidade computacional ocorrido nos último anos, a utilização de modelos matemáticos tem se tornado cada vez mais necessária.

Para ilustrar a utilização e a análise de modelos matemáticos, a seguir será considerado o exemplo de modelos utilizados para descrever crescimento populacional. Para facilitar a compreensão, serão considerados modelos que descrevem o crescimento de populações de animais, porém, estes modelos são amplamente utilizados em diversas outras áreas, como por exemplo para descrever a variação de uma população de moléculas com um determinado peso molecular em um sistema polimérico, a população de bactérias em sistemas fermentativos, a população de bolhas com um determinado tamanho em sistemas líquido/gás, etc.

2.2.1. Crescimento Populacional

Para iniciar o estudo das equações diferenciais, vamos considerar alguns modelos simplificados para descrever a variação no número de indivíduos de uma população ao longo do tempo.

A derivada de uma variável y em relação a uma variável x (dy/dx) indica como y varia em relação a x. Considere o caso onde deseja-se saber como uma população de p ratos em uma área rural varia ao longo de t meses. A taxa de variação será:

$$[\text{taxa de variação}] = \frac{dp}{dt} = \left[\frac{\text{ratos}}{\text{mês}}\right]$$

Vamos supor que, na ausência de predadores, os ratos se reproduzam numa taxa proporcional ao número de indivíduos na população (quanto mais ratos, maior a taxa de crescimento):

$$\frac{dp}{dt} \sim p$$

Esta relação pode ser transformada em uma igualdade com o uso de uma constante de proporcionalidade $r > 0$:

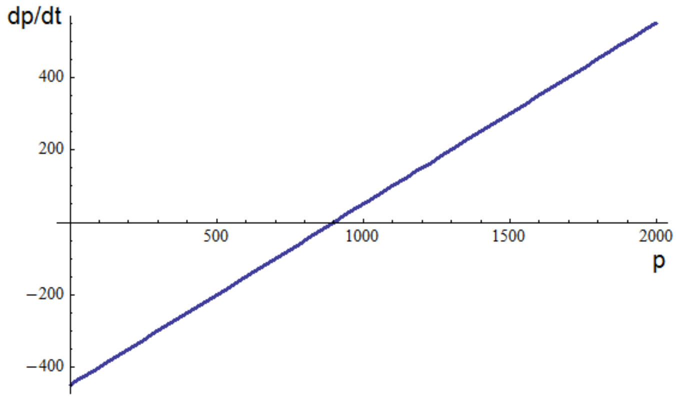
$$\frac{dp}{dt} = rp$$

Segundo esta equação, a taxa de crescimento de uma população inicial p_0 será sempre positiva, sendo que no limite onde $t \to \infty$, $p \to \infty$, ou seja, a população de ratos tende ao infinito. Felizmente, este modelo não representa adequadamente a variação na população de ratos para longos períodos de tempo, pois eventualmente irão ocorrer limitações de espaço ou recursos que farão com que a população pare de crescer ou passe a crescer com uma taxa menor. No entanto, este modelo (chamado de modelo Malthusiano) descreve muito bem o crescimento inicial de populações pequenas.

Vamos considerar agora um modelo (um pouco) mais realista. Suponha que nesta área rural existam corujas que matam 15 ratos por dia (ou 450 ratos por mês) e que $r = 0.5\,\text{mês}^{-1}$. Assim, o modelo pode ser reescrito como:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Neste caso, a taxa de crescimento é representada por uma reta, como ilustrado na figura a seguir.



Quando $dp/dt < 0$, a população irá diminuir com o tempo e quando $dp/dt > 0$, a população irá aumentar com o tempo. O caso onde $dp/dt = 0$ é especialmente importante pois representa o ponto onde a população está em equilíbrio. Os valores de p onde $dp/dt = 0\,\forall t$ são chamados de ***pontos de equilíbrio*** (também conhecidos como *pontos fixos*) e representam situações onde a população não diminui nem aumenta ao longo do tempo.

Campo de Direções

Considere a equação diferencial apresentada anteriormente:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Neste caso, a função do lado direito depende somente de p e pode ser expressa como $f(p) = 0.5p - 450$. Para traçar o campo de direções, é interessante primeiramente determinar os pontos de equilíbrio (pontos onde $f(p) = 0$):

$$f(p) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 0.5p - 450 = 0 \qquad \rightarrow \qquad p = 900$$

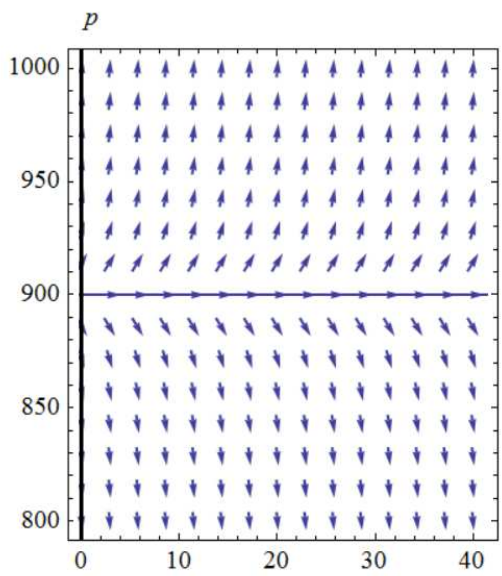
Os pontos de equilíbrio correspondem à linhas horizontais no campo de direções. Assim, em $p = 900$ o campo de direções é horizontal.

Avaliando valores de p próximos a 900, pode-se determinar a inclinação no campo de direções para cada ponto. Como a equação é uma equação autônoma, a inclinação é a mesma para todos os valores de t. Por exemplo:

$$p = 850 \rightarrow f(p) = -25 \qquad\qquad p = 800 \rightarrow f(p) = -50$$

$$p = 950 \rightarrow f(p) = 25 \qquad\qquad p = 1000 \rightarrow f(p) = 50$$

Com isso, pode-se construir o campo de direções apresentado na figura a seguir.



De modo geral, pode-se observar que para valores de $p < 900$ a população de ratos decresce e para valores de $p > 900$ a população aumenta, sendo que a taxa de aumento/diminuição aumenta conforme de distancia de $p = 900$.

2.2.2. Equação Logística

A equação logística é um modelo de crescimento populacional que assume que a taxa de crescimento *relativa* decresce linearmente conforme a população aumenta. O termo "relativo" representa o valor por membro da população:

$$[\text{Taxa de crescimento relativa}] = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$$

de modo que a equação logística pode ser representada como:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = k - mp$$

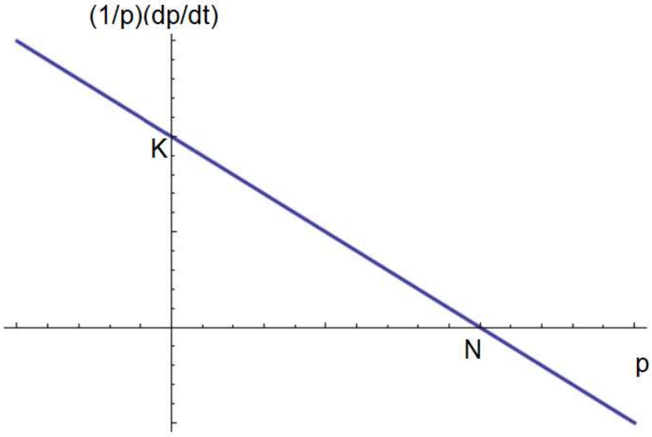
O coeficiente m corresponde à inclinação da reta:

$$m = \frac{k-0}{N-0} = \frac{k}{N}$$

Assim:

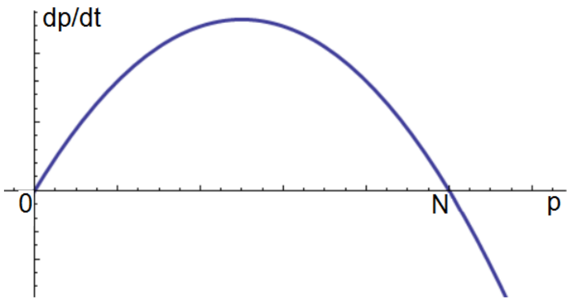
$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = k - \frac{N}{k}p \qquad \rightarrow \qquad \frac{dp}{dt} = kp - \frac{k}{N}p^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right)$$

a constante k é chamada de taxa de crescimento intrínseco e leva em conta a taxa de crescimento na ausência de fatores limitantes (diferença entre nascimento e morte, imigração e emigração, etc.) e a constante N é chamada de capacidade de suporte logístico.



O lado direito da equação logística é uma parábola em relação à variável p. Avaliando os pontos fixos da equação:

$$\frac{dp}{dt} = 0 = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) \qquad \rightarrow \qquad p_1 = 0 \qquad p_2 = N$$

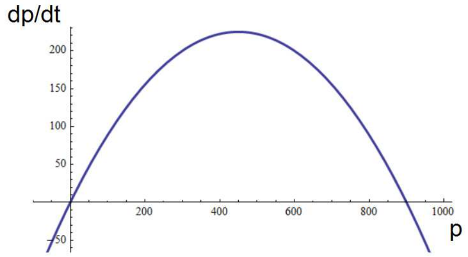


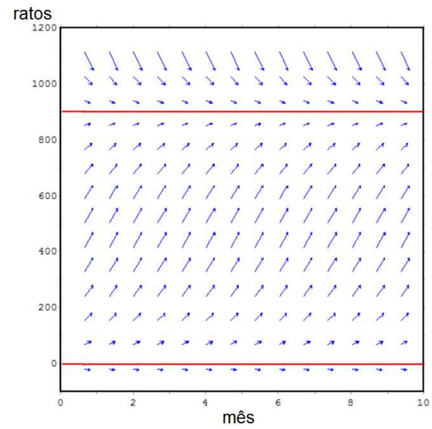
Assim, observa-se que a capacidade de suporte representa um ponto fixo da equação. Pelo gráfico, pode-se observar que a taxa de crescimento só é positiva no intervalo $0 < p < N$, sendo negativa para valores de $p > N$.

Exemplo 01) Considere que a equação logística é empregada para modelar o crescimento da população de ratos discutida anteriormente.

(a) Assumindo que $k = 1\,\text{mês}^{-1}$ e que $N = 900\,\text{ratos}$, faça o gráfico de dp/dt vs p e um esboço do campo de direções.

Como visto anteriormente, neste caso os pontos de equilíbrio corresponde a $p = 0$ e $p = N$.





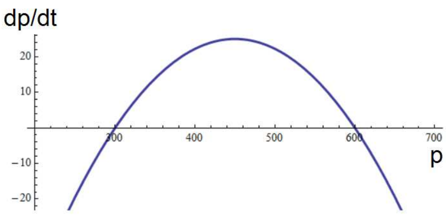
(b) Considere que 200 ratos são caçados por mês. Acrescente este termo na equação logística, faça o gráfico de dp/dt vs p e um esboço do campo de direções resultante.

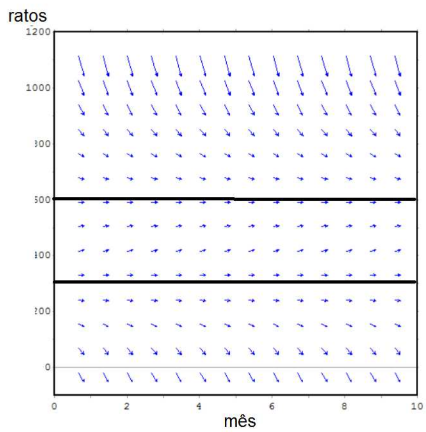
Encontrando os novos pontos de equilíbrio:

$$\frac{dp}{dt} = p\left(1 - \frac{p}{900}\right) - 200 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 180000 = p(900 - p) \qquad \rightarrow \qquad -p^2 + 900p - 180000 = 0$$

De onde se obtém que:

$$p_1 = 300 \qquad\qquad p_2 = 600$$



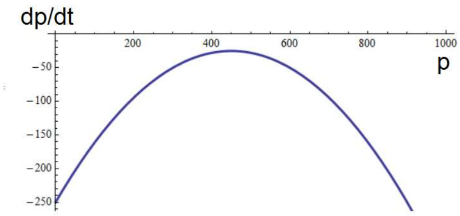


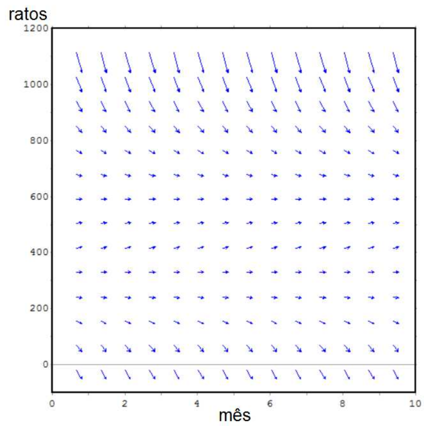
(c) Considere agora que 250 ratos são caçados por mês. Acrescente este termo na equação logística, faça o gráfico de dp/dt vs p e um esboço do campo de direções resultante.

Neste caso, a equação logística pode ser escrita como:

$$\frac{dp}{dt} = p\left(1 - \frac{p}{900}\right) - 250 = 0$$

Esta equação não possui raízes reais e é menor que zero para qualquer valor de p. Assim, quando 250 ratos são caçados por mês, a população de ratos irá inevitavelmente diminuir e desaparecer com o tempo.





Lista de Exercícios - Campo de Direções

1) Faça um esboço do campo de direções das seguintes equações diferencias e determine o comportamento das equações conforme $t \to \infty$. Caso este comportamento dependa do valor inicial de y, especifique como é esta dependência.

$a)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}$

R: $y(t \to \infty) \to -\infty$ ***caso*** $t_0 < 0$. $y(t \to \infty) \to \infty$ ***caso*** $t_0 > 0$

$b)\dfrac{dy}{dt} = \cos(y)$

R: $y(t \to \infty) \to \pi/2$ ***caso*** $-\pi/2 < y_0 < 3\pi/2$***;*** $y(t \to \infty) \to -3\pi/2$ ***caso*** $-2\pi < y_0 < -3\pi/2$***;*** $\ldots$

$c)\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 1$

R: $y(t \to \infty) \to \infty$

$d)\dfrac{dy}{dt} = t^2$

R: $y(t \to \infty) \to \infty$

2) Utilizando algum software específico, construa o campo de direções para as equações a seguir e determine o comportamento das equações conforme $x \to \infty$. Caso este comportamento dependa do valor inicial de y, especifique como é esta dependência.

$a)\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

R: $y(x \to \infty) \to \infty$

$b)\dfrac{dy}{dx} = xy$

R: $y(x \to \infty) \to -\infty$**,** $x_0 < 0$**,** $y(x \to \infty) \to \infty$**,** $x_0 > 0$

$c)\dfrac{dy}{dx} = xy^2$

R: $y(x \to \infty) \to 0$**,** $y_0 < 0$**,** $y(x \to \infty) \to \infty$**,** $y_0 > 0$

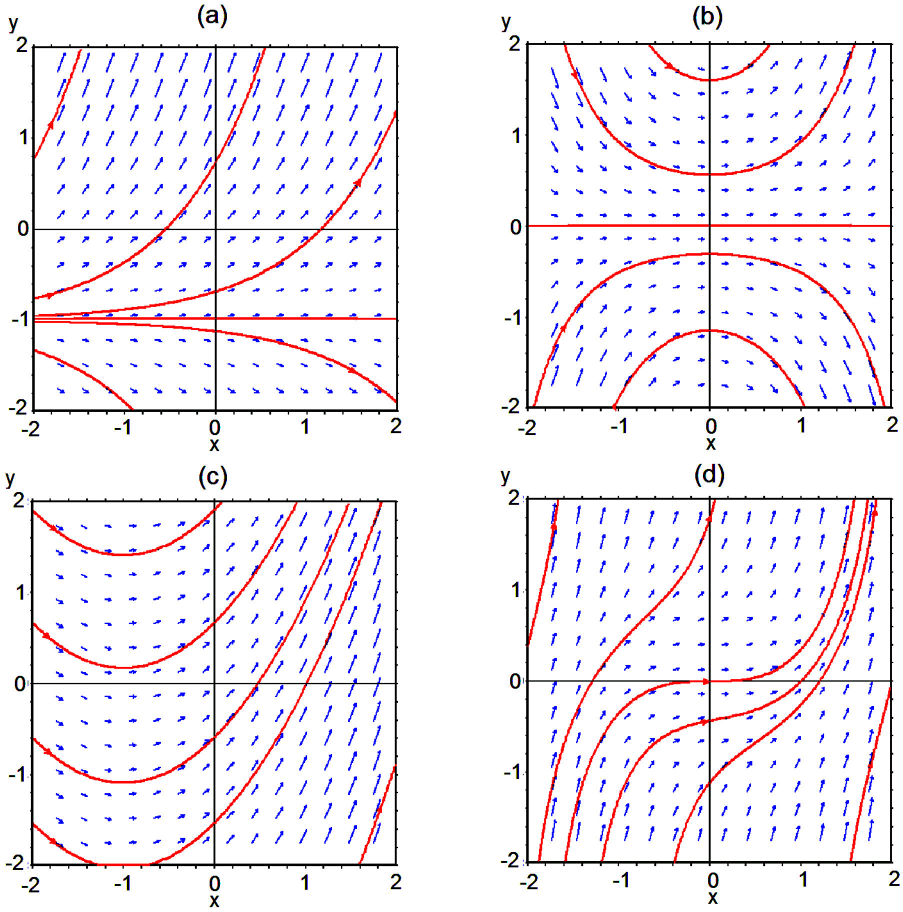
$d)\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y)$

R: $y(x \to \infty) \to -\infty$

3) Associe os campos de direções fornecidos na sequência com alguma das seguintes EDO's. Faça uma breve justificativa da escolha. *Dica:* Avalie o sinal da derivada em cada quadrante (positivo/negativo) e a existência de pontos onde o campo é horizontal (ou seja, $dy/dx = 0$).

$1)\dfrac{dy}{dx} = x + 1$ $\quad$ $3)\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ $\quad$ $5)\dfrac{dy}{dx} = y - 1$

$2)\dfrac{dy}{dx} = y + 1$ $\quad$ $4)\dfrac{dy}{dx} = xy$ $\quad$ $6)\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$



R: (a) Eq. 2, (b) Eq. 4, (c) Eq. 1, (d) Eq. 6

3. Reta de Fases e Bifurcações

3.1. Equações Autônomas e Reta de Fases

As equações diferenciais de primeira ordem são ditas autônomas quando podem ser escritas da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Isto significa que a taxa de variação depende somente do estado atual da variável e não do ponto no tempo onde a variável é avaliada. As equações vistas para crescimento população são exemplos de equações autônomas. As EDO's de primeira ordem autônomas são sempre separáveis e podem ser resolvidas por integração simples.

As equações autônomas possuem uma característica muito importante de que as soluções particulares podem ser deslocadas ao longo do eixo t. Assim, se for conhecida a solução de uma equação autônoma que obedece uma condição inicial específica, pode-se obter soluções para outras condições iniciais simplesmente deslocando esta solução para a direita ou para a esquerda. Lembrando, para deslocar uma função $f(x)$ em a unidades para a direita, basta avaliar $f(x-a)$.

Exemplo 01: A solução do PVI:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \qquad y(0) = 0$$

é $y(t) = \tan(t)$. Encontre a solução para a condição $y(1) = 0$.

3.1.1. Reta de Fases

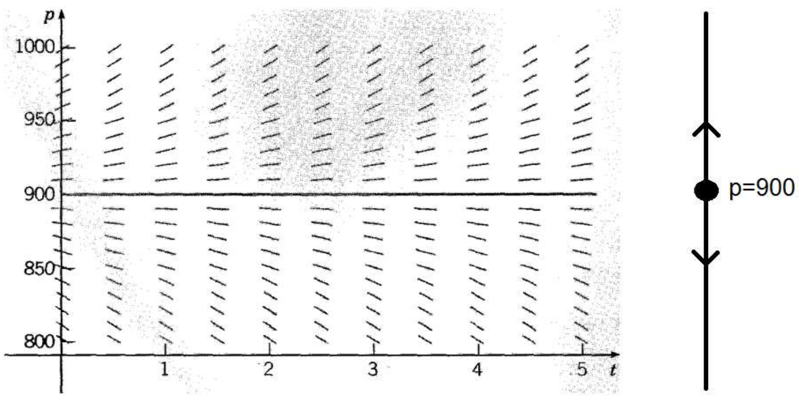
Como visto anteriormente, o campo de direções de uma equação autônoma da forma $y'(t) = f(y)$ não irá variar ao longo de t. Assim, se for determinado a inclinação da função $f(y)$ ao longo de uma reta representando algum valor qualquer de t qualquer, pode-se construir todo o campo de direção deslocando esta reta ao longo do eixo t.

A representação do campo de direções como uma única reta é chamada de linha de fase. Esta linha consiste em uma reta indicando os pontos de equilíbrio e e setas indicando o sinal da derivada entre os pontos. Considerando que $f(y)$ seja uma função contínua e diferenciável, caso existam dois pontos a e b de modo que $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$, existe algum ponto de equilíbrio entre a e b. Por isso, para a construção da reta de fases, basta definir os pontos de equilíbrio e o sinal da derivada entre os pontos.

Exemplo 2: Construa a linha de fase para a equação:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Neste caso, o único ponto de equilíbrio é $p = 900$. Acima deste valor, $dp/dt > 0$ e abaixo dele $dp/dt < 0$. Assim, a linha de fase pode ser construída:



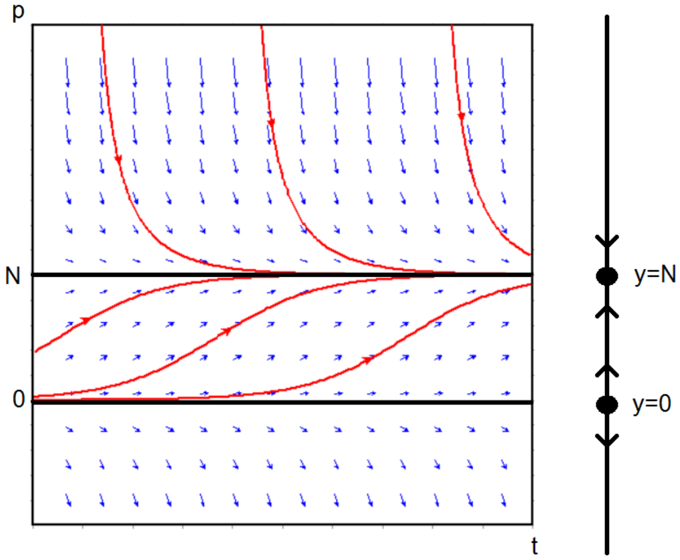
Pode-se ver que se o valor inicial de p for algo próximo (mas não igual) a 900, a solução irá se afastar do ponto fixo. Neste caso, o ponto é chamado de repulsor (ou fonte).

De modo geral, dizemos que um ponto de equilíbrio y_0 é uma fonte quando a solução da equação diferencial com valor inicial próxima a este ponto tende a y_0 conforme $t \to -\infty$. Considerando que y_0 seja utilizada como condição inicial, qualquer pequena pertubação fará com que o sistema se afaste do ponto y_0 conforme o tempo avança, por isso este tipo de ponto de equilíbrio está associado com uma solução ***instável***.

Exemplo 03: Construa a linha de fase para a equação logística:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right)$$

Com visto anteriormente, os pontos fixos desta equação são $p = 0$ e $p = N$. A linha de fase pode ser avaliada como:



Neste caso, o ponto $y = 0$ se comporta como um repulsor. O ponto N, no entanto, possui um comportamento oposto, sendo que uma condição inicial próxima a N irá tender ao ponto N ao longo do tempo. Neste caso, o ponto N é chamado de atrator (ou poço).

Um ponto de equilíbrio y_0 é um poço se toda condição inicial suficientemente próxima a y_0 tende para y_0 conforme $t \to \infty$. Assim, quando a condição $y = y_0$ é perturbada, o sistema volta para y_0 e neste caso o ponto de equilíbrio está associado a uma solução ***estável***.

Exemplo 04: Construa a linha de fase para a equação:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \cos(y)$$

Primeiramente, deve-se encontrar os pontos de equilíbrio da equação. Temos que:

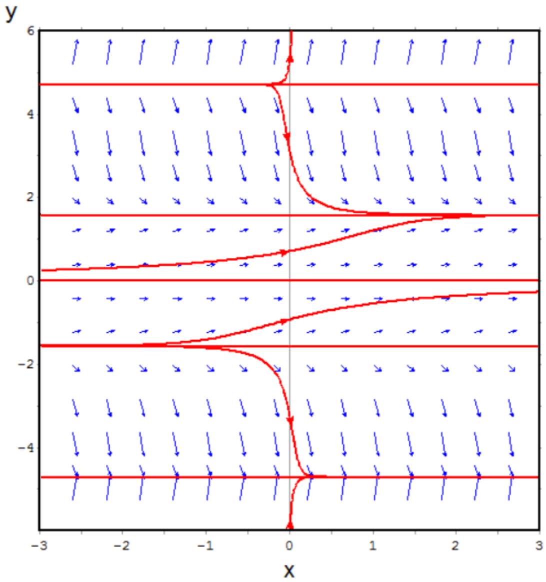
$$y^2 \cos(y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos(y) = 0$$

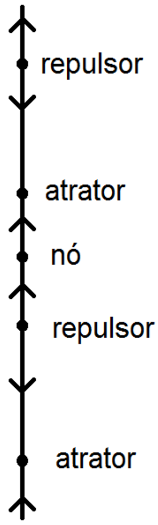
$y^2 = 0$ implica que $y = 0$. A função $\cos(y)$ resulta em:

$$\cos(y) = 0 \qquad \to \qquad y = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2} \ldots$$

Para avaliar se o lado direito da equação é positivo ou negativo, pode-se considerar que y^2 é sempre positivo, de modo que o sinal será definido pelo valor da função $\cos(y)$.

Construindo a linha de fase:





Esta linha de fases possui diversos atratores e repulsores. O ponto $y = 0$ possui um comportamento híbrido, pois soluções partindo de algum ponto pouco abaixo de 0 tendem a 0 e soluções partindo de pontos pouco acima de 0 tendem ao próximo ponto fixo. Este tipo de ponto de equilíbrio é chamado de nó e corresponde a uma solução semi-estável.

Exemplo 05: Construa a linha de fase para a equação:

$$\frac{dy}{dt} = 3y^3 - 12y^2$$

e classifique os pontos de equilíbrio como fontes, poços ou nós.

3.2. Bifurcações

A grande maioria dos modelos matemáticos envolve, além das variáveis dependentes e independentes, um certo número de parâmetros. Por exemplo, no modelo de crescimento exponencial:

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

existe o parâmetro k que irá depender da população e das condições avaliadas.

Em alguns casos, uma pequena variação no valor de algum parâmetro leva a uma grande variação no comportamento do sistema ao longo do tempo e nos pontos de equilíbrio. Esta mudança de comportamento é chamada de bifurcação.

Exemplo 06: Considere novamente a equação logística modificada para incluir um termo referente ao número de indivíduos caçados:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - c$$

Esta equação possui três parâmetros: a taxa de crescimento intrínseca k, a capacidade de carga N e a taxa constante de remoção c.

Considerando que os parâmetros k e N são fixos, determine para quais valores de c a equação logística modificada possui pontos de equilíbrio reais.

R: $c < kN/4$

Para avaliar o comportamento do sistema conforme um parâmetro a é variado, considere o modelo simplificado:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y) - a$$

Para $a = 0$, a equação possui dois pontos de equilíbrio, $y = 0$ e $y = 1$, sendo que $y = 0$ é uma fonte e $y = 1$ um poço.

Considere agora que $a = 1/8$. Os pontos de equilíbrio serão as raízes da equação:

$$y(1-y) - \frac{1}{8} = 0 \qquad \rightarrow \qquad -8y^2 + 8y - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{16}$$

ou seja:

$$y = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{32}}{16} \qquad \rightarrow \qquad y_1 = 0.1465 \qquad y_2 = 0.85553$$

Avaliando a linha de fase, obtém-se um comportamento semelhante ao caso $a = 0$, porém com os pontos de equilíbrio mais próximos.

Considerando agora $a = 1/5$, os pontos de equilíbrio serão:

$$y(1-y) - \frac{1}{5} = 0 \qquad \rightarrow \qquad -5y^2 + 5y - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{10}$$

ou ainda:

$$y = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10} \qquad \rightarrow \qquad y_1 = 0.2764 \qquad y_2 = 0.7236$$

Avaliando agora para $a = 1/4$:

$$y(1-y) - \frac{1}{4} = 0 \qquad \rightarrow \qquad -4y^2 + 4y - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2}$$

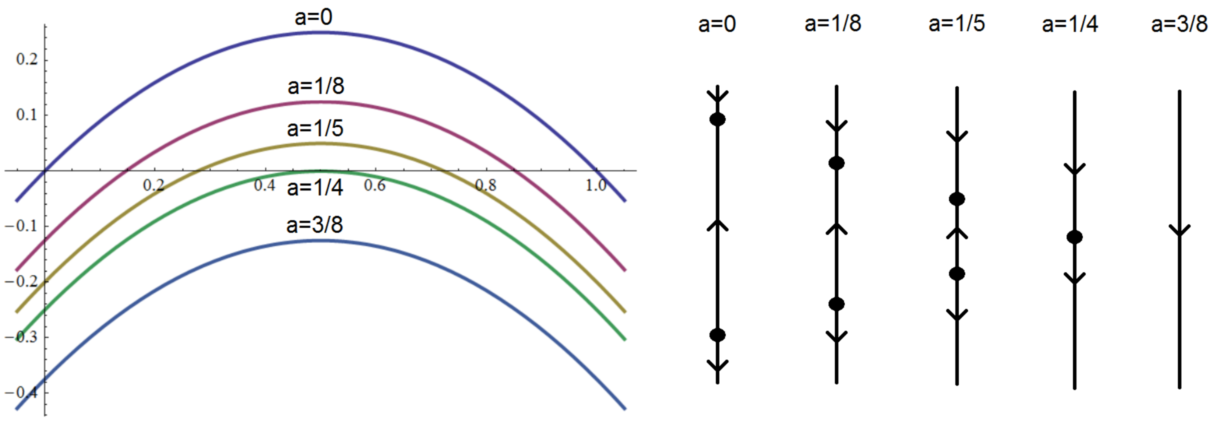
Neste caso, obtém-se somente um ponto de equilíbrio. Avaliando a linha de fase, percebe-se que este ponto é um nó.

Finalmente, considerando $a = 3/8$, os pontos de equilíbrio são:

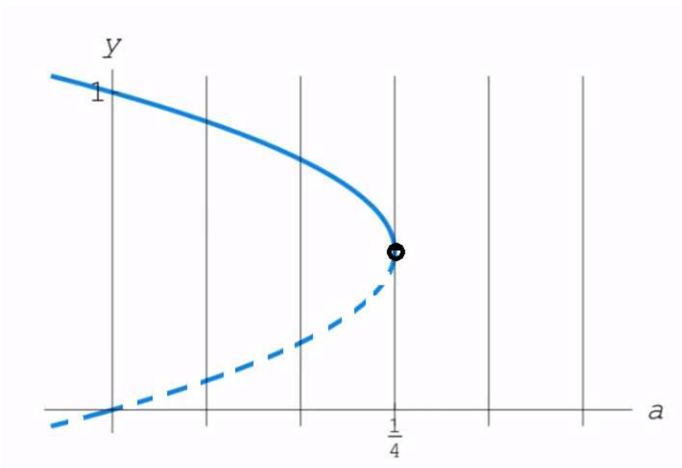
$$y(1-y) - \frac{3}{8} = 0 \qquad \rightarrow \qquad -8y^2 + 8y - 3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{8 \pm \sqrt{64-96}}{16}$$

Neste caso, o sistema não apresenta nenhum ponto de equilíbrio real, com $dp/dt < 0$ para qualquer valor de y, ou seja, a taxa de crescimento é negativa não importando o valor inicial.

A reta de fase para estes casos é apresentada na figura a seguir:



Ligando os pontos de equilíbrio para um número suficientemente grande de valores de a, obtém-se o diagrama de bifurcação da equação diferencial:



Neste caso, o ponto $a = 1/4$ representa um ponto de bifurcação. A linha sólida é utilizada para representar os pontos de equilíbrio *estáveis* (poços), enquanto que a linha tracejada é usada para representar pontos *instáveis* (fontes). O círculo preenchido pela metade representa um ponto de nó. Este tipo de bifurcação, onde uma solução estável e uma instável colapsam em um nó, é chamada de bifurcação *sela-nó*.

Bifurcações do tipo sela-nó também surgem na análise de equações com a seguinte forma:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + r$$

onde r e uma parâmetro. De certa forma, esta equação representa a forma mais simples que origina este tipo de bifurcação, por isto é chamada de *forma normal da bifucação sela-nó.* Apesar de ser a forma mais simples, quando analisado próximo ao ponto de bifurcação, todos os sitemas que apresentam uma bifurcação deste tipo possuem um comportamento semalhante (dois pontos fixos colapsando e desaparecendo), por isso a forma normal representa qualitativamente *qualquer* sistema com esta forma de bifurcação.

Para o caso anterior, os pontos de equilíbrio são as soluções da equação:

$$y(1-y)-a=0 \qquad \rightarrow \qquad -y^2+y-a=0 \qquad \rightarrow \qquad y=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{-2}$$

Para cada valor de a, podem ser obtidos de zero a dois pontos de equilíbrio (raízes reais). Para saber se um ponto de equilíbrio é estável ou instável, pode-se recorrer ao seguinte teorema:

Teorema 01: Condições de estabilidade e instabilidade. Considerando uma função $f(y)$ contínua com df/dy também contínua, a equação diferencial $dy/dt = f(y)$ possui um ponto de equilíbrio em y_0 quando $f(y_0) = 0$. Se $df/dy(y_0) < 0$, então este ponto é um poço (estável) e se $df/dy(y_0) > 0$ então este ponto é uma fonte (instável).

O diagrama de bifurcação pode ser obtido plotando-se a função que relaciona os pontos de equilíbrio com o parâmetro avaliado. Por exemplo, para o caso anterior, a parte estável corresponde a curva:

$$y_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4a}}{2}$$

e a parte instável corresponde a:

$$y_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4a}}{2}$$

Avaliando a função original:

$$f(y)=y(1-y)-a \qquad \rightarrow \qquad \frac{df}{dy}=f'(y)=1-2y$$

Substituindo as expressões para os pontos de equilíbrio:

$$f'(y_1)=1-2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4a}}{2}\right)=1-1-\frac{\sqrt{1-4a}}{2}=-\sqrt{1-4a}$$

$$f'(y_2)=1-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4a}}{2}\right)=1-1+\frac{\sqrt{1-4a}}{2}=+\sqrt{1-4a}$$

Considerando que $a < 1/4$ para que a equação possua pontos de equilíbrio reais, pode-se ver que $f'(y_1) < 0$ e $f'(y_2) > 0$, de modo que a curva y_1 representa soluções estáveis e a curva y_2 soluções instáveis, conforme observado anteriormente.

Exemplo 07: Encontre o ponto de bifurcação e esboce o diagrama de bifurcação para a equação logística modificada:

$$\frac{dp}{dt} = f(p) = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - c$$

em função do parâmetro c.

Como visto anteriormente, esta equação possui pontos de equilíbrios reais somente se $c \leq kN/4$, portanto o ponto de bifurcação é $c = kN/4$. Neste caso, a equação irá possuir 2 pontos de equilíbrio (função quadrática).

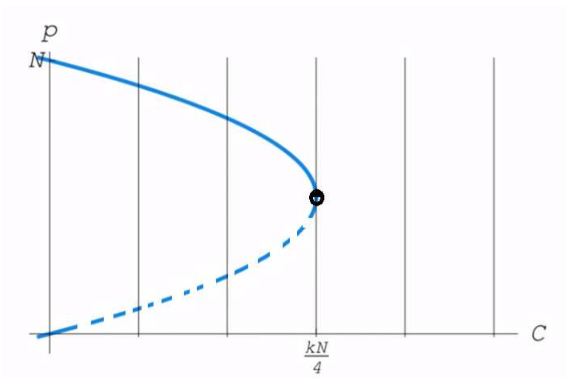
Além disso, os pontos de equilíbrio ocorrem quando:

$$p = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - (4kc/N)}}{2k/N}$$

E os dois ramos de solução podem ser expressos como:

$$p_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 - (4kc/N)}}{2k/N} \qquad p_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 - (4kc/N)}}{2k/N}$$

Como k, c e N são constantes positivas, estas curvas representam uma parábola em relação ao eixo p (semelhante ao diagrama obtido anteriormente). Como visto em exemplos anteriores, a solução p_1 representa pontos de equilíbrio estáveis e a solução p_2 pontos instáveis. (Obs.: Neste caso não é possível aplicar o teorema pois os valores de k, N e c não são especificados).



Exemplo 08: A forma normal para uma bifurcação forquilha subcrítica é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = ry + y^3$$

onde r é um parâmetro. Faça um esboço do diagrama de bifurcação para esta equação.

Lista de Exercícios - Reta de Fase e Bifurcações

01) Construa a linha de fase e classifique os pontos de equilíbrio como fontes, poços ou nós para as seguintes equações diferenciais autônomas:

$a)\dfrac{dy}{dt} = y^2 - y$

R: $y = 0$ (poço), $y = 1$ (fonte)

$b)a\dfrac{dy}{dt} + y = b \qquad a, b > 0$

R: $y = b$ (poço)

$c)\dfrac{dy}{dt} = (1 - y)\sin(y)$

R: $y = 1$ (poço), $y = 0$ (fonte), $y = -\pi$ (poço), ...

$d)\dfrac{dy}{dt} = y\cos(\pi y/2)$

R: $y = 1$ (poço), $y = 0$ (fonte), $y = -1$ (poço), ...

02) Utilizando a linha de fase da equação diferencia, determine o comportamento da solução dos seguintes PVI's conforme $t \to -\infty$ e $t \to \infty$.

$a)\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 4y - 12 \qquad y(0) = 1$

R: $y(-\infty) = 6$, $y(\infty) = -2$

$b)\dfrac{dy}{dt} = y\sin(\pi y/2) \qquad y(0) = 0$

R: $y(-\infty) = 0$, $y(\infty) = 0$

$c)\dfrac{dy}{dt} = y\sin(\pi y/2) \qquad y(0) = -1$

R: $y(-\infty) = 2$, $y(\infty) = 0$

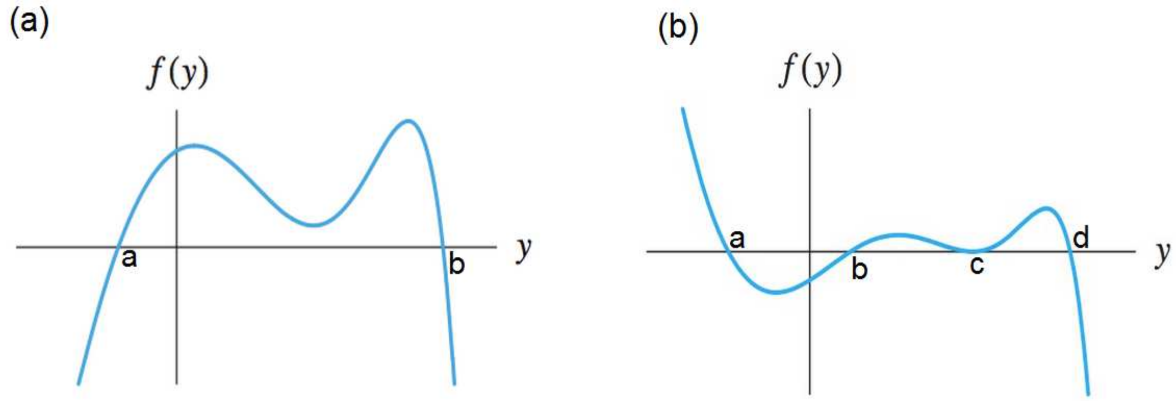
$d)\dfrac{dp}{dt} = kp\left(1 - \dfrac{p}{N}\right)\left(1 - \dfrac{m}{p}\right) \qquad p(0) = \dfrac{N}{2} \qquad k,\ m,\ p,\ N > 0 \qquad N > 2m$

R: $p(-\infty) = m$, $p(\infty) = N$

03) Construa a linha de fase para a equação diferencial autônoma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

onde $f(y)$ é apresentada nos gráficos a seguir.



04) A *forma normal* de uma bifurcação do tipo sela-nó é expressa pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = r + y^2$$

onde r é um parâmetro. Faça um esboço do diagrama de bifurcação para esta equação.

05) A forma normal de uma bifurcação do tipo transcrítica é expressa pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = ry + y^2$$

onde r é um parâmetro. Faça um esboço do diagrama de bifurcação para esta equação.

06) Uma bifurcação do tipo forquilha pode ocorrer de duas formas: subcrítica e supercrítica. A forma normal de uma bifurcação forquilha subcrítica é:

$$\frac{dy}{dt} = ry + y^3$$

enquanto que forma normal de uma bifurcação forquilha supercrítica é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = ry - y^3$$

onde r é um parâmetro. Faça um esboço do diagrama de bifurcação para estes dois casos.

4. Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

As equações diferenciais de primeira ordem podem ser expressas como:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

Não existe um método geral que possa ser aplicado para resolver esta equação para qualquer função $f(y,t)$, mas existem métodos aplicáveis para determinadas subclasses. Em muitos casos, a equação pode ser resolvida por integração direta.

A **solução geral** das EDO's de primeira ordem irá sempre conter 1 constante a ser determinada. Caso alguma condição seja especificada para a determinação desta constante, como por exemplo o valor da variável dependente para algum valor específico da variável independente, chama-se o conjunto da equação mais a condição de problema de Problema de Valor Inicial (PVI) e a solução obtida de ***solução particular***.

A classe mais simples de EDO's de primeira ordem são as equações separáveis, que podem ser resolvidas por integração direta.

4.1. Equações Separáveis

Em muitos casos, as equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas da forma:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Nesta forma, pode-se integrar ambos os lados da equação em relação a x:

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx$$

Como $(dy/dx) * dx = dy$, tem-se que:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Se as funções $g(y)$ e $f(x)$ forem contínuas, então as integrais podem ser avaliadas e pode-se obter uma solução geral para a equação diferencial. Este método de solução é chamado de separação de variáveis e a equação diferencial é chamada de equação separável, pois pode-se separar a variável dependente e a independente em lados distintos da igualdade.

Exemplo 02-a: Encontre a solução geral para a equação empregada anteriormente para descrever a variação na população de ratos do campo:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Esta é uma EDO linear autônoma que pode ser separada como:

$$\frac{dp}{p - 900} = \frac{dt}{2}$$

Integrando os dois lados da equação:

$$\int \frac{dp}{p - 900} = \int \frac{dt}{2}$$

O termo do lado esquerdo pode ser resolvido fazendo $u = p - 900$. Assim:

$$\ln|p - 900| + c_1 = \frac{t}{2} + c_2$$

As duas constantes de integração podem ser agrupadas:

$$\ln|p - 900| = \frac{t}{2} + c$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados:

$$p - 900 = e^{t/2+c} = e^c e^{t/2}$$

Como c é uma constante, e^c também é constante. Assim, a solução geral da equação pode ser escrita como:

$$p(t) = 900 + ce^{t/2}$$

Exemplo 02-b: Obtenha a solução particular para as condições iniciais (em $t = 0$) $p = 950$ e $p = 850$. Avalie o comportamento de p conforme $t \to \infty$ e compare com a análise do campo de direções.

Considerando a condição inicial $p(0) = 950$:

$$950 = 900 + ce^0 \qquad \to \qquad c = 950 - 900 = 50$$

Assim, a solução particular será:

$$p_{900} = 900 + 50e^{t/2}$$

Para a condição inicial $p(0) = 850$:

$$850 = 900 + ce^0 \qquad \rightarrow \qquad c = 850 - 900 = -50$$

A solução particular será:

$$p_{850} = 900 - 50e^{t/2}$$

Conforme $t \rightarrow \infty$, temos que $p_{900} \rightarrow \infty$ e $p_{850} \rightarrow -\infty$ (ou tende a zero, já que p representa o número de ratos). Este comportamento está de acordo com o observado no campo de direções.

Exemplo 03: Encontre a solução geral para a equação logística:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

Encontre também a solução particular para a condição inicial $P = P_0$ para $t = 0$.

A equação logística pode ser escrita da forma:

$$\frac{N}{P(N-P)}\frac{dP}{dt} = k \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{N}{P(N-P)}dP = \int kdt$$

A integral do lado esquerdo da equação pode ser resolvida por frações parciais:

$$\frac{N}{P(N-P)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{N-P} = \frac{a(N-P)+bP}{P(N-P)} = \frac{aN+(b-a)P}{P(N-P)}$$

As constantes a e b podem ser obtidas da forma:

$$aN = N \qquad (b-a)P = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = b = 1$$

De modo que:

$$\frac{N}{P(N-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{N-P}$$

Com isso, a equação anterior pode ser avaliada como:

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{N-P} = \int kdt$$

$$\ln|P| - \ln|N-P| = kt + c \qquad \rightarrow \qquad \ln\left|\frac{P}{N-P}\right| = kt + c$$

avaliando a exponencial em ambos os lados:

$$\left|\frac{P}{N-P}\right| = c_1 e^{kt} \qquad\qquad c_1 = e^c$$

De modo que a solução geral pode ser obtida:

$$P = c_1(N-P)e^{kt}$$

A condição inicial especifica que $P(0) = P_0$:

$$P_0 = c_1(N-P_0)e^{k0} \qquad \to \qquad P_0 = c_1(N-P_0)$$

De onde se obtém que:

$$c_1 = \frac{P_0}{N-P_0}$$

Substituindo na solução geral:

$$P = \frac{P_0(N-P)}{N-P_0}e^{kt} \qquad \to \qquad (N-P_0)P = P_0(N-P)e^{kt}$$

Resolvendo para P:

$$(N-P_0)P + P_0e^{kt}P = P_0Ne^{kt} \qquad \to \qquad \left(\frac{N-P_0}{P_0} + e^{kt}\right)P = Ne^{kt}$$

Colocando e^{kt} em evidência:

$$\left(\frac{N-P_0}{P_0e^{kt}} + 1\right)P = N \qquad \to \qquad \big((N/P_0 - 1)e^{-kt} + 1\big)\,P = N$$

Definindo $\alpha = N/P_0 - 1$, obtém-se a expressão:

$$P = \frac{N}{1+\alpha e^{-kt}}$$

Esta função apresenta um comportamento sigmoidal. Inicialmente ocorre um aumento exponencial (alta disponibilidade de recursos) que tende a diminuir e estabilizar com o tempo.

4.2. Aplicações de EDO's de 1ª Ordem

Exercício 01: Uma determinada população de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presente. Se a quantidade de bactérias $p(t)$ cresce de 1 grama para 50 gramas em 12 horas, qual a massa de bactérias presente após 18 horas?

Resolução:

Como a quantidade $p(t)$ cresce em uma taxa proporcional a $p(t)$, a taxa de crescimento dp/dt pode ser dada por:

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

Esta é uma EDO separável que pode ser escrita como:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = k$$

Integrando em relação a t em ambos os lados:

$$\ln(p) = kt + c_1$$

Aplicando o operador exponencial nos dois lados:

$$p(t) = e^{kt+c_1}$$

Considerando as propriedades da exponencial:

$$p(t) = e^{kt}e^{c_1}$$

Definindo $c = e^{c_1}$, obtém-se a solução geral:

$$p(t) = ce^{kt}$$

Pode-se verificar que está solução está correta substituindo-se a função obtida na EDO e verificando se a igualdade é satisfeita. Para determinar a constante e integração c pode-se aplicar a condição inicial $p(0) = 1$:

$$p(0) = ce^{k0} = c = 1$$

De modo que a solução particular será:

$$p(t) = e^{kt}$$

Para determinar a constante k pode-se utilizar a outra condição conhecida, $p(12) = 50$:

$$p(12) = e^{12k} = 50 \qquad \rightarrow \qquad k = \ln(50)/12 = 0.32602$$

Com isso, a massa de bactérias pode ser avaliada como:

$$p(t) = e^{0.32602t}$$

Finalmente, a massa após 18 horas pode ser estimada:

$$p(18) = e^{0.32602\times 18} = 355.54\,g$$

Exercício 02: A análise da quantidade de carbono-14 pode ser empregada para determinar a idade de fósseis de organismos orgânicos, pois este passa a decair após a morte do organismo. Sabendo que o tempo de meia vida (tempo necessário para que metade do material decaia para C^{12}) do C^{14} é de 5715 anos, determine a idade de uma múmia onde a relação C^{14}/C^{12} é de 52.5% do valor encontrado em organismos vivos. A taxa de decaimento de materiais radioativos é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

onde k é uma constante.

Resolução:

Neste caso não é especificado um valor específico para a massa inicial de C-14. Uma maneira de resolver este problema é assumir uma *base de cálculo*, ou seja, um valor aleatório para a massa inicial. Como os demais dados são fornecidos em termos de frações, o valor adotado não irá afetar a solução. Por simplicidade, será assumido que $y(0) = 1$.

Como o tempo de meia vida é de 5715 anos, isto implica que $y(5715) = 0.5$. Agora, basta obter a solução particular e determinar o tempo necessário para que $y(t) = 0.525$, sendo esta a fração presente na múmia.

A solução geral segue o mesmo procedimento do exemplo anterior:

$$y(t) = ce^{-kt}$$

Aplicando a condição inicial $y(0) = 1$, obtém-se que $c = 1$, de modo que:

$$y(t) = e^{-kt}$$

Usando a condição $y(5715) = 0.5$:

$$y(5715) = e^{-5715k} = 0.5 \qquad \rightarrow \qquad k = -0.0001213$$

Assim, a solução particular será:

$$y(t) = e^{-0.0001213t}$$

O tempo t_0 para que $y(t) = 0.525$ é estimado como:

$$y(t_0) = e^{-0.0001213t_0} = 0.525 \qquad \rightarrow \qquad t_0 = \frac{ln(0.525)}{-0.0001213} = 5312\,anos$$

Exercício 03: A variação temporal na temperatura de um corpo quente exposto em um ambiente com temperatura T_∞ pode ser avaliada através da **Lei de Newton do Resfriamento**, dada por:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty)$$

onde T é a temperatura do corpo, t o tempo, T_∞ é a temperatura ambiente e k é uma constante que depende do material e da área de troca térmica. Obtenha a solução geral para esta EDO.

Exercício 04: Um material cerâmico é removido de um forno a uma temperatura de 1500 K e exposto a um ambiente a $300K$. Considerando que este material possui um coeficiente $k = 0.0004\ s^{-1}$, determine a variação na temperatura do material em função do tempo. Qual a temperatura do material em $t = 3600\,s$? Considere que a variação na temperatura segue a Lei de Newton do resfriamento.

Exercício 05: Considere um circuito contendo uma força eletromotriz que produz uma tensão $E(t)$, um capacitor cm capacitância C e uma resistor com resistência R. A aplicação de Lei de Kirchhoff neste sistema resulta em

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

onde Q é a carga. Considerando que $I = dQ/dt$, a equação pode ser expressa como:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Assumindo que $E(t)$ é um valor constante E e que a carga inicial é nula, determine $Q(t)$.

Lista de Exercícios - Aplicações de EDO's de 1ª Ordem

01) A velocidade $v(t)$ de um objeto em queda pode ser descrita pela equação:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

onde m é a massa do objeto, g a aceleração da gravidade e γ é um coeficiente relacionado com o arraste causado pelo ar e com o formato do objeto.

(a) Encontre os pontos de equilíbrio (velocidade terminal, v_0) para esta equação;

R: $v_0 = mg/\gamma$

(b) Considerando que $m = 10\,kg$, $g = 9.82\,ms^{-2}$ e $\gamma = 2\,kg/s$, faça um esboço do campo de direções para esta equação;

(c) Encontre a solução geral para esta EDO;

R: $v(t) = 49 + c_1 e^{-t/5}$

(d) Considerando que o objeto esteja inicialmente em repouso, determine a função que descreve a velocidade ao longo do tempo. Qual o valor da velocidade quando $t \to \infty$?

R: $v(t) = 49(1 - e^{-t/5})$, $v(t \to \infty) = 49\,m/s$

02) A população de uma espécie de peixe em um lago é modelada pela equação logística com taxa de crescimento intrínseco $k = 0.2\,\text{ano}^{-1}$ e capacidade de carga de $N = 200\,\text{peixes}$.

(a) Escreva a equação diferencial que descreve a taxa de crescimento da população de peixes;

R: $dp/dt = kp(1 - p/N)$

(b) Obtenha o campo de direções para esta equação;

(c) Considerando que inicialmente existem 100 peixes no lago, encontre uma expressão para o número de peixes no lago ao longo do tempo [1]. Utilize o resultado para estimar o número de peixes após 5 anos;

R: $p(t) = 200/(1 + e^{-0.2t})$, $p(5) \approx 146$

(d) Considere agora que ocorre uma migração contínua que faz com que 30 novos indivíduos sejam inseridos no lago a cada ano. Ajuste o modelo logístico para considerar a migração;

R: $dp/dt = kp(1 - p/N) + 30$

(e) Obtenha o campo de direções para este novo caso e com base nisso preveja qual a quantidade de indivíduos que estará presente após um longo período de tempo ($t \to \infty$).

[1] Dica: Utilize a resolução apresentada anteriormente para esta EDO.

R: $p(t \to \infty) = 300$

03) A taxa de crescimento de tumores pode ser descrita pelo modelo de Gompertz, dado por:

$$\frac{dy}{dt} = -Ay \ln y$$

onde $y(t)$ é a massa das células do tumor em um tempo t e A é uma constante positiva associada às condições de desenvolvimento do tumor. O declínio na massa do tumor para $y > 1$ ocorre devido ao fato de que as células no interior do tumor podem morrer devido à falta de oxigênio e nutrientes. Obtenha a solução geral para esta EDO.

Dica: $\int dy/(y\ln(y)) = \ln(\ln(y)) + c$

R: $y(t) = e^{c_1 e^{-At}}$

04) Em uma análise determinou-se a massa de um tumor como sendo 10 micro-gramas. Considerando que neste caso a constante A é de $A = -0.02$ dia^{-1}, determine a massa do tumor após 30 dias.

R: y(30 dias) = 66.39 micro-gramas

05) A taxa de crescimento de uma cultura de bactérias é proporcional ao número de indivíduos, podendo ser modelada como:

$$\frac{dg}{dt} = kg$$

onde g representa o número de células e k é uma constante positiva. Considerando que a população é de $g = 10^6$ em $t = 0$ e de $g = 1.5 \times 10^6$ após uma hora, determine a função $g(t)$. Qual a número de células após 5 horas?

R: g(5 horas) = 7.594×10^6 células

06) Após produzir $10\,kg$ de "uma substância azul misteriosa", Walter White pede para Jesse Pinkman armazenar a substância em um local seguro. No entanto, Jesse armazena o material em um local inadequado, o que faz com que ele se degrade ao longo do tempo. A taxa de degradação para este material é dada por:

$$\frac{dA}{dt} = -kA^2$$

onde A representa a massa do material e k é uma constante positiva. Após 15 dias, Walter analisa o produto e determina que restam $9.25\,kg$ do material puro. Obtenha uma função que descreva a massa da substância ao longo do tempo e determine a massa restante após 30 dias.

R: A(30 dias) $= 8.60465\,kg$

07) A Lei de Newton do resfriamento pode ser utilizada para modelar a variação na temperatura de um corpo exposto em um ambiente com temperatura constante. Por exemplo, costuma ser utilizada na investigação criminal para determinar a hora da morte em casos de assassinato. Pode-se considerar que até a hora da morte, a temperatura do corpo é aproximadamente $38°\,C$. Após a morte, o corpo começa a perder calor para o ambiente, sendo que a variação na temperatura pode ser modelada pela Lei de Newton. Por conveniência, a equação pode ser escrita como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_e - T)$$

onde T_e é a temperatura ambiente.

Considere que você chega na cena de um crime as 15:00h e encontra um corpo. A vítima é encontrada em uma sala que está em uma temperatura constante de $25°\,C$ o dia todo. Através de uma medição, você determina que a temperatura do corpo é $34°\,C$. Após uma hora, uma nova medição é realizada e a temperatura medida é de $31°C$. Determine a hora da morte considerando que a temperatura da pessoa viva era de $38°\,C$.

R: 14:05h

08) Algumas doenças (como o tifo) são disseminadas basicamente por portadores, indivíduos que podem transmitir a doença, mas que não exibem seus sintomas. Considere que x e y representam, respectivamente, a proporção de indivíduos portadores e suscetíveis na população. Suponha que os portadores são identificados e removidos da população a uma taxa β, de modo que:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y$$

Suponha, também, que a doença se propaga a uma taxa proporcional ao produto xy, sendo que:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha xy$$

(a) Determine a variação de portadores ao longo do tempo ($y(t)$) considerando que $y(0) = y_0$;

R: $y = y_0 e^{-\beta t}$

(b) Utilize o resultado do item (a) para encontrar a variação na proporção de indivíduos suscetíveis ($x(t)$), considerando que $x(0) = x_0$;

R: $y = x_0 e^{-\frac{\alpha y_0}{\beta}(1-e^{-\beta t})}$

(c) Encontre a proporção da população que escapa à epidemia, encontrando o valor limite de x quando $t \to \infty$.

R: $x_0 e^{-\frac{\alpha y_0}{\beta}}$

09) Uma pessoa desavisada entra em uma garagem com um volume total de $V = 80\,m^3$ e liga um carro, liberando uma vazão de $Q_1 = 0.005\,m^3/\min$ de monóxido de carbono. Através de uma janela, uma corrente de $Q_2 = 0.8\,m^3/\min$ de ar deixa a garagem. Considerando que uma corrente equivalente de ar puro entra na garagem para manter o volume total constante, a variação no volume de monóxido de carbono V_{CO} é dada por:

$$\frac{dV_{CO}}{dt} = Q_1 - Q_2 \frac{V_{CO}}{V}$$

Quando o volume de CO chegar a 0.1% do volume total da garagem, a pessoa irá desmaiar e eventualmente morrer. Determine quanto tempo esta pessoa tem para deixar a garagem, considerando que inicialmente não existia nenhum CO no ambiente.

10) O balanço de massa para um reagente em um reator homogêneo resultou na seguinte equação:

$$V\frac{dc}{dt} = F - Qc - kVc$$

onde c é a concentração do reagente, V o volume do reator, F a taxa com que o reagente é alimentado, Q a vazão na saída e k a velocidade de reação. Considere que inicialmente ($t = 0$) o reator está isento do reagente ($c(0) = 0$).

a) Determine qual a concentração do reagente no reator após ser atingido o equilíbrio (ou seja, quando $dc/dt = 0$);

b) Determine o tempo necessário para que a concentração do reagente seja a metade da concentração no estado de equilíbrio;

c) Admitindo que os parâmetros V, F, Q e k são positivos, faça um esboço do campo de direções para esta EDO.

11) Um dado material radioativo x decai com uma taxa k_1 formando um elemento y. Este elemento, por sua vez, também sofre decaimento com uma taxa k_2, de modo que a variação

na concentração destes elementos é dada pelo seguinte conjunto de equações:

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y$$

Considerando que inicialmente os valores para x e y sejam, respectivamente, x_0 e y_0, determine a variação em x e y como uma função do tempo t.

★[2] 12) ***(Redução de ordem)*** Considere a seguinte EDO de segunda ordem, que representa como a distribuição de temperatura varia ao longo da parede de um cano metálico com raio interno R_1 e raio externo R_2:

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0$$

Esta EDO (assim como qualqer outra EDO de segunda ordem) pode ser transformada em um sistema de 2 EDO's de primeira ordem através da mudança de variável $u = dT/dr$. Neste caso em particular, pode-se resolver separadamente a equação para obter $u(r)$ e na sequência a equação para $T(r)$. Considerando que a temperatura em $r = R_1$ é T_1 e em $r = R_2$ é T_2, obtenha $T(r)$.

R: $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)(\ln(r/R_1)/\ln(R_2/R_1))$

★ 13) ***(Mudança de variável)*** Encontre a solução geral para a seguinte EDO:

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

Dica: Defina uma nova variável $u = y/x$.

R: $y^2 = cx - x^2$

[2] Questões indicadas com esta estrela podem exigir uma dedicação maior, porém garantem uma quantidade de pontos de experiência consideravelmente superior.

5. Existência e Unicidade para EDO's de 1^a Ordem

Antes de discutir a existência e unicidade das EDO's, é preciso avaliar o conceito de domínio de uma equação diferencial e domínio de solução de um problema de valor inicial. Considere uma equação do tipo:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

O domínio desta equação corresponde ao subdomínio do plano ty onde a função $f(t, y)$ é definida. Em outras palavras, pode-se dizer que o domínio de solução corresponde a região onde o campo de direções é definido, ou seja, representa todas as regiões onde pode haver *alguma* solução da equação.

Exemplo 01: Avalie o domínio das seguintes EDO's:

$$a)\frac{dy}{dt} = y^3 - t^2 \qquad b)\frac{dy}{dt} = y^2 \qquad c)\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \qquad d)\frac{dy}{dt} = \ln(t)$$

As equações (a) e (b) não apresentam nenhuma descontinuidade, portanto o seu domínio é o próprio plano ty. A equação (c) não é definida em $t = 0$, portanto o seu domínio é o plano ty com exceção do eixo y (ou seja, dos pontos onde $t = 0$). A equação (d) não é definida para $t \leq 0$, logo o domínio corresponde a $t > 0$.

Considere agora o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \qquad\qquad y(t_0) = y_0$$

A solução deste PVI, se existir, será uma função $y(t)$. O ***domínio de solução*** deste PVI corresponde ao intervalo englobando (t_0, y_0) onde esta solução é contínua. Por exemplo, considere o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2} \qquad\qquad y(-1) = 2$$

A solução deste PVI será $y(t) = (t-1)/t$. Esta solução não é definida em $t = 0$, pois $y(t) \to \infty$ conforme $t \to 0$. Portanto, uma solução que parte do ponto $(-1, 2)$ não será válida para valores de $x \geq 0$ devido a esta descontinuidade.

É importante destacar a diferença entre o domínio da equação diferencial e o domínio da solução do PVI. Para o exemplo anterior, o domínio da equação será todo o plano real com exceção da linha $t = 0$. Em contrapartida, o intervalo da solução do PVI é $(-\infty, 0)$.

Considere agora que a condição inicial seja alterada:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2} \qquad\qquad y(1) = 2$$

A solução neste caso será $y(t) = (3t-1)/t$. Esta função também não é definida em $t = 0$, porém neste caso o domínio da solução é o intervalo $(0, \infty)$.

Antes de tentar resolver o problema em busca de uma solução, deve-se considerar uma série questões:

i) Existência: Existe alguma função $y(t)$ que satisfaz esta EDO com a condição inicial especificada?

ii) Unicidade: Se uma solução existir, esta é única ou existem mais de uma função $y(t)$ que satisfazem as condições?

iii) Intervalo de Validade: Considerando que exista uma solução única, esta solução pode ser utilizada para avaliar $y(t)$ para qualquer valor de t ou existe algum intervalo delimitado onde a solução é válida?

Para analisar como estas perguntas podem ser respondias, será primeiramente considerado o caso de equações lineares e na sequência os resultados serão generalizados para qualquer tipo de EDO de primeira ordem.

5.1. EDO's de 1^a Ordem Lineares

Um problema de valor inicial (PVI) de primeira ordem linear pode ser escrito de forma geral como:

$$y'(t) + p(t)y = q(t) \qquad\qquad y(t_0) = y_0$$

Para esta forma de equação, as questões anteriores podem ser respondidas considerando o seguinte teorema:

Teorema 01 - Existência e Unicidade para Equações Lineares: Uma EDO de primeira ordem linear $y'(t) + p(t)y = q(t)$ admite solução passando por um ponto $y(t_0) = y_0$ se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas em $t = t_0$. Esta solução será única e o domínio de solução é pelo menos igual ao maior intervalo contendo $t = t_0$ onde $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas.

Uma outra forma de enunciar o teorema anterior é a seguinte:

Considere o seguinte PVI:

$$y'(t) + p(t)y = q(t) \qquad\qquad y(t_0) = y_0$$

Se $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em um intervalo aberto $\alpha < t < \beta$ e este intervalo contém t_0, então existe uma solução única para o PVI neste intervalo.

Este teorema estabelece uma condição suficiente mas não necessária para garantir a existência, unicidade e intervalo de solução do PVI. É importante observar que este teorema define as características da solução baseadas somente no valor de t_0, sendo que y_0 não afeta as conclusões.

Exemplo 02: Determine o intervalo de validade do seguinte PVI:

$$(t^2 - 9)y' + 2y = \ln|20 - 4t| \qquad\qquad y(4) = -3$$

Resolução:

Na forma padrão, esta equação pode ser escrita como:

$$y' + \frac{2}{t^2 - 9}y = -\frac{ln|20 - 4t|}{t^2 - 9}$$

Identificando as funções:

$$p(t) = \frac{2}{t^2 - 9} \qquad\qquad q(t) = \frac{\ln|20 - 4t|}{t^2 - 9}$$

A função $p(t)$ é descontínua nos pontos $t = 3$ e $t = -3$. A função $q(t)$ é descontínua nos pontos $t = 3$, $t = -3$ e $t = 5$. Assim, os intervalos onde ambas são contínuas são:

$$(-\infty, -3) \qquad (-3, 3) \qquad (3, 5) \qquad (5, \infty)$$

Como a condição inicial é especificada em $t = 4$, o domínio de solução será o interfavalo $t \in (3, 5)$.

Os critérios definidos no Teorema 01 são válidos para EDO's de primeira ordem lineares, sendo que para problemas não-lineares outros fatores afetam a solução e devem ser considerados. A seguir serão avaliadas separadamente as condições para existência e unicidade da solução.

5.2. Teorema da Existência

Primeiramente, deve-se determinar se o PVI avaliado possui alguma solução. A condição de existência para problemas de 1^a ordem é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema da Existência: Considere uma função $f(y,t)$ contínua em um retângulo da forma:

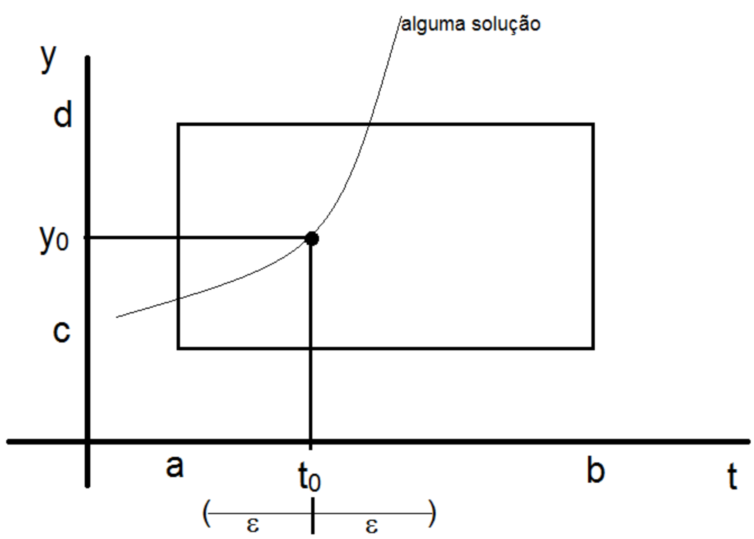
$$\{(t,y)|a < t < b,\ c < y < d\}$$

no plano ty. Se (t_0, y_0) é um ponto neste retângulo, então existe algum valor $\epsilon > 0$ e ao menos uma solução $y(t)$ para o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad y(t_0) = y_0$$

no intervalo $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$. Esta condição é suficiente (mas não necessária) para garantir que o PVI possui ao menos uma solução.

O parâmetro ϵ não possui um valor constante, mas sim irá variar dependendo de cada caso. Este parâmetro pode ser pensado como algum valor para a esquerda e para a direita do ponto t_0 onde o PVI vai possuir solução.



Como será ilustrado no exemplo a seguir, em alguns casos pode-se determinar o valor de ϵ com base na solução do PVI, porém, de modo geral o importante é que este valor existe. Em outras palavras, considerando que $f(t,y)$ seja contínua em um retângulo englobando o ponto (t_0, y_0), então existe alguma solução para o PVI definida em pelo menos uma pequena região em torno do ponto (t_0, y_0).

Exemplo 02: Determine o valor de ϵ para o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \qquad\qquad y(0) = 0$$

Neste caso, a função $f(t, y) = 1 + y^2$ é contínua em todo plano ty, portanto, irá existir ao menos uma solução que passa em qualquer ponto (t_0, y_0). Porém, o valor de ϵ para cada ponto não será necessariamente o mesmo.

Esta equação autônoma pode ser separada da forma:

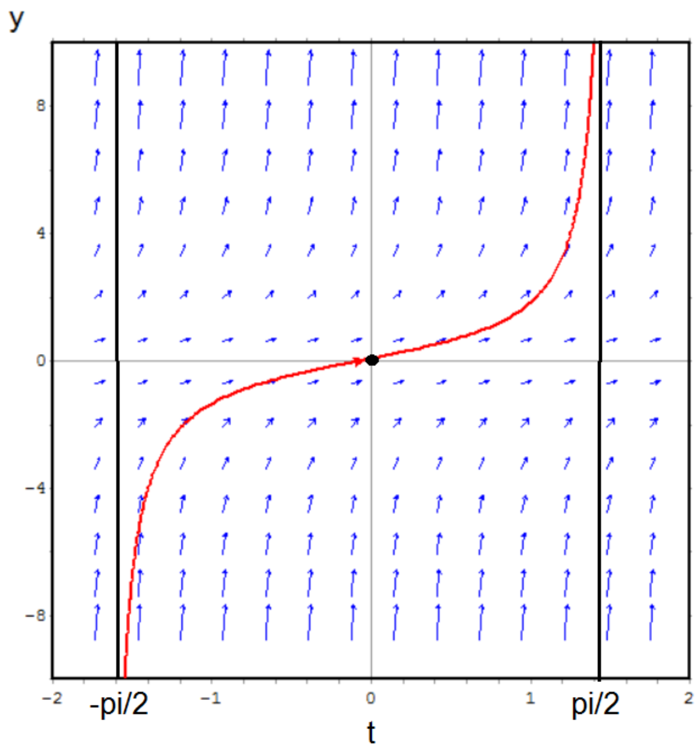
$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt \qquad \rightarrow \qquad \arctan y = t + k \qquad \rightarrow \qquad y = \tan(t + k)$$

Utilizando a condição inicial:

$$0 = \tan(0 + k) \qquad \rightarrow \qquad k = 0$$

Assim, a solução do PVI é:

$$y(t) = \tan(t)$$



A função tangente não é definida em $t = \pm\pi/2$. Conforme t se aproxima de $\pi/2$, a função $y(t)$ tende ao infinito, enquanto que conforme t se aproxima de $-\pi/2$ a solução tende a $-\infty$.

Assim, a condição inicial deve estar definida em um intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para que a solução do PVI exista. Com $t_0 = 0$, o critério para existência resulta em:

$$t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon \qquad \rightarrow \qquad -\pi/2 < t < \pi/2 \qquad \rightarrow \qquad \epsilon = \pi/2$$

Se a condição inicial fosse, por exemplo $y(\pi/4) = 1$, teríamos que $\epsilon = \pi/4$.

A princípio, pode-se imaginar que a descontinuidade da *solução* em $t = \pm\pi/2$ fosse impedir que alguma solução passando por um ponto $(\pi/2, y_0)$ existisse, o que iria contradizer o teorema. No entanto, caso uma condição neste ponto fosse especificada, a solução seria deslocada para que a curva passasse por este ponto, portanto o teorema continua válido.

5.3. Teorema da Unicidade

Em alguns casos, pode-se obter mais de uma solução que satisfaça um único PVI. Para determinar quando um PVI possui somente uma solução, pode-se utilizar o teorema da unicidade:

Teorema da Unicidade: Suponha que $f(t, y)$ e $\partial f/\partial y$ são funções contínuas em um retângulo da forma

$$\{(t, y)|a < t < b,\ c < y < d\}$$

no plano ty, se (t_0, y_0) é um ponto neste retângulo e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas funções que resolvem o PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

para todo t no intervalo $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ (onde ϵ é algum valor positivo), então

$$y_1(t) = y_2(t)$$

para $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$. Ou seja, a solução do PVI é única.

Dessa forma, se $f(t, y)$ e $\partial f/\partial y$ forem contínuas em um intervalo contendo o ponto inicial, os teoremas da existência e da unicidade garante que haverá uma única solução que satisfaz a equação diferencial e a condição inicial especificada.

Obs.: *Derivada de Função de várias variáveis*: Quando se avalia a **derivada parcial** de uma função $f(t, y)$ em relação à uma das variáveis t ou y, considera-se a outra variável como uma constante. Por exemplo, considere a função $f(t, y) = t^2 + y^3 + 5ty$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2t + 5y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 5t$$

A **derivada total** da função $f(t, y)$ em relação a t é dada por:

$$\frac{d}{dt}(f(t, y)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo 03: Avalie a existência e a unicidade dos seguintes PVI's:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x - y + 1 \qquad y(1) = 2$

Avaliando a derivada do lado direito $f(x, y) = x - y + 1$ em função de y:

$$\frac{df}{dy} = -1$$

Assim, tanto a função $f(x, y)$ quando sua derivada são contínuas para qualquer valor de x e y. Assim, os teoremas da existência e unicidade garante que o problema possui solução e esta é única.

(b) $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} \qquad y(x_0) = y_0$

Avaliando a derivada de $f(x, y) = 2y/x$:

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{x}$$

Neste caso, tanto a função quanto a derivada são definidas para qualquer valor, exceto para $x = 0$. Assim, os teoremas dizem que para qualquer valor de $x_0 \neq 0$, existe alguma solução única.

Para exemplificar este comportamento, considere que esta equação pode ser resolvida como:

$$y(x) = Cx^2$$

Quando uma condição inicial do tipo $0, y_0$ é utilizada, não existe solução para qualquer valor de $y_0 \neq 0$. Além disso, para qualquer valor de C na equação de $y(x)$, a solução irá passar pelo ponto $(0, 0)$. Assim, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad y(0) = 0$$

Possui infinitas soluções e que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad y(0) = y_0 \, y_0 \neq 0$$

não possui solução.

Exemplo 04: Avalie como o intervalo de validade para o seguinte PVI depende do valor de y_0:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \qquad\qquad y(0) = y_0$$

Neste caso, temos que:

$$f(t, y) = y^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

As duas funções são contínuas para qualquer valor de t e y, logo existe solução única para qualquer valor de y_0.

Para determinar o intervalo de validade da solução, como a equação é não-linear, deve-se avaliar a solução particular. Antes disso, pode-se notar que caso $y_0 = 0$, a função $y(t) = 0$ satisfaz a EDO e a condição inicial. Como esta função é uma constante, o intervalo de validade caso $y_0 = 0$ será de menos a mais infinito.

Considerando agora que $y_0 \neq 0$, pode-se resolver a EDO por integração

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt \qquad \rightarrow \qquad -\frac{1}{y} = t + c \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{-1}{t+c}$$

Aplicando a C.I.:

$$y(0) = \frac{-1}{c} = y_0 \qquad \rightarrow \qquad c = -\frac{1}{y_0}$$

Logo, a solução particular será:

$$y = \frac{-1}{t - 1/y_0} = \frac{-y_0}{ty_0 - 1} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$$

Est função possui uma descontinuidade para $t = 1/y_0$, logo o intervalo de validade não será de mais a menos infinito. Como esta é a única descontinuidade, existem duas possibilidades para o domínio de solução:

$$(i) \qquad \rightarrow \qquad (-\infty, 1/y_0)$$

$$(ii) \qquad \rightarrow \qquad (1/y_0, -\infty)$$

Para saber qual dos dois intervalos será o equivalente à solução, deve-se determinar onde a condição inicial é especificada. Neste caso, a condição é dada em $t = 0$. Supondo que $y_0 < 0$, o ponto $t = 0$ estará no intervalo (ii), equanto que se $y_0 > 0$, o ponto estará no intevalo (i).

Assim, a dependência do intervalo de solução com y_0 se dá da seguinte forma:

- Se $y_0 < 0$, o intervalo de validade da solução será $t \in (1/y_0, \infty)$;
- Se $y_0 = 0$, o intervalo de validade da solução será $t \in (-\infty, \infty)$;
- Se $y_0 > 0$, o intervalo de validade da solução será $t \in (-\infty, 1/y_0)$.

Lista de Exercícios - Existência e Unicidade

01) Determine se os seguintes PVI's possuem solução e se esta solução é única. Caso existir solução única, determine o domínio de solução:

$a)\dfrac{dy}{dt} = e^t - y \qquad y(0) = 0$

R: Solução única, domínio $= \Re^2$

$b)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\sin(t)}{t^2-9} + 5e^t \qquad y(0) = \pi$

R: Solução única, domínio $= (-3, 3)$

$c)\dfrac{dy}{dx} = 3x + \tan(x)y \qquad y(2\pi) = 0$

R: Solução única, domínio $= (3\pi/2, 5\pi/2)$

$d)\dfrac{dy}{dx} = 3x + \tan(x)y \qquad y(\pi/2) = 0$

R: Sem solução

$e)\dfrac{dy}{dt} = e^{-t} + \ln|6-t|y \qquad y(6) = 0$

R: Sem solução

6. Métodos de Resolução de EDO's de 1^a Ordem

Não existe um método único para a resolução de qualquer EDO de primeira ordem. Porém, para muitas subclasses de equações (como as separáveis, vistas anteriormente) existem métodos que podem ser utilizados para a obtenção de uma solução *analítica*. Por solução analítica entende-se uma função definida em um dado intervalo de solução que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais especificadas em todo este intervalo. Este termo é utilizado para diferenciar as soluções *numéricas*, que são aproximações obtidas através de métodos numéricos. Dentre os métodos de obtenção de soluções analíticas, um dos mais importantes é o método do fator integrante, que pode ser aplicado para a resolução de *qualquer EDO de primeira ordem linear*, como será apresentado a seguir.

6.1. Método do Fator Integrante

As EDO's de primeira ordem lineares podem ser expressas como:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Quando as funções $p(t)$ e $g(t)$ são constantes, a equação é uma EDO autônoma e pode ser resolvida por separação de variáveis e integração simples.

A integração direta também pode ser empregada quando $p(t) = 0$. Porém, não pode ser aplicada para funções genéricas $p(t)$ e $g(t)$ pois nem sempre é possível separar as variáveis t e y em lados diferentes da igualdade.

Neste caso, pode-se utilizar um *fator integrante* ($\mu(t)$) para auxiliar a resolução da equação diferencial. O fator integrante é um termo que possibilita a integração da equação. Cada equação irá possuir um fator integrante próprio, por isso não é possível especificar um formato para a função $\mu(t)$ sem analisar a EDO. Multiplicando a forma geral de uma EDO linear pelo fator integrante, temos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t)$$

Uma possibilidade de resolver esta equação é se o lado esquero puder ser escrito como:

$$\frac{d(\mu(t)y)}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y$$

Neste caso, pode-se integrar os dois lados da equação anterior e obter $y(t)$. Assim, se for possível encontrar um fator $\mu(t)$ que permita esta modificação, será possível resolver a equação.

Considerando a regra do produto para a análise de derivadas, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{d(\mu(t)y)}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + y\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y$$

Simplificando a equação:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)p(t)$$

Esta equação é separável, podendo ser resolvida como:

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t) \qquad \rightarrow \qquad \ln(\mu(t)) = \int p(t)dt + c \qquad \rightarrow \qquad \mu(t) = Ce^{\int p(t)dt}$$

onde C é uma constante de integração. Como o fator irá multiplicar todos os termos da equação, esta constante será sempre cancelada e por conveniência pode ser omitida. Assim, o fator integrante pode ser definido como:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Para verificar se este fator irá de fato permitir a integração da EDO linear, vamos substitui-lo na equação e averiguar a equação.

Avaliando primeiramente a derivada de $\mu(t)$ obtemos:

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt}\frac{d}{dt}\left(\int p(t)dt\right) = e^{\int p(t)dt}p(t) = \mu(t)p(t)$$

Multiplicando uma EDO linear de 1ª ordem qualquer pelo fator integrante:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t)$$

Como $\mu(t)p(t) = d\mu/dt$, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y = \mu(t)q(t)$$

O lado esquerdo da equação é a derivada do produto $y\mu(t)$, de modo que:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)q(t)$$

Definindo $Y(t) = \mu(t)y(t)$ e $f(t) = \mu(t)q(t)$ temos:

$$\frac{dY}{dt} = f(t)$$

Este tipo de equação pode ser resolvida por integração simples:

$$Y(t) = \int f(t)dt \qquad \rightarrow \qquad \mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt$$

Como $\mu(t) \neq 0$ para qualquer valor de t, pode-se avaliar $y(t)$ como:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)q(t)dt$$

Exemplo 01: Resolva o seguinte PVI:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3} \qquad y(0) = y_0$$

6.1.1. Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli é uma equação não-linear de primeira ordem, que pode ser escrita da forma:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n, \qquad n \neq 1$$

Dividindo todos os termos por y^n, a equação pode ser escrita como:

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} + p(t)y^{1-n} = q(t)$$

Esta equação pode ser transformada em uma equação linear através da transformação $u = y^{1-n}$. Isto implica que:

$$\frac{du}{dt} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dt}$$

Com isso, a equação pode ser expressa como:

$$y^{-n}\left(\frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{du}{dt}\right) + p(t)u = q(t) \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{(1-n)}\frac{du}{dt} + p(t)u = q(t)$$

Esta é uma equação linear que pode então ser resolvida utilizando o método do fator integrante. Após a obtenção de $u(t)$, pode-se voltar para as variáveis originais.

Exemplo 02: Encontre a solução geral para a seguinte equação diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} - y = (xy)^2$$

6.2. Equações Exatas

Grande parte das EDO's de primeira ordem que admitem solução analítica podem ser resolvidas por separação ou com o uso de um fator integrante, porém algumas equações específicas que surgem em determinadas áreas possuem formas de solução distintas, como por exemplo as equações exatas.

Estas equações surgem em diversas aplicações na área das engenharias, como por exemplo em termodinâmica. Estas equações possuem uma estrutura relativamente simples e possuem um método estabelecido de solução.

Considere a EDO de primeira ordem em termos da variável dependente $y(x)$:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \rightarrow \qquad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Esta equação é dita exata se existe uma função $\psi(x,y)$ de modo que:

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Pode-se mostrar que a função $\psi(x,y)$ existe se e somente se:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

A derivada total da função $\psi(x,y)$ em relação a x é definida como:

$$\frac{d\psi(x,y)}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}$$

Desse modo, uma equação diferencial de primeira ordem exata pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx}(\psi(x,y)) = 0$$

A solução geral desta equação é da forma:

$$\psi(x,y) = \text{constante}$$

De modo que conhecendo-se a função $\psi(x,y)$, pode-se explicitar a função $y(x)$.

Exemplo 03: Encontre a solução geral para a seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-y^2}$$

Pode-se ver que esta equação é não-linear e também não-separável. Pode-se, no entanto, escrever esta equação da forma:

$$(x-y)dx + (y^2-x)dy = 0$$

De modo que que $M(x,y) = (x - y)$ e $N(x,y) = (y^2 - x)$. Pode-se agora checar se esta equação é exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Como $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, a equação é exata.

Para determinar o valor de $\psi(x,y)$, pode-se utilizar as equações que definem $M(x,y)$ e $N(x,y)$:

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Pode-se obter duas equações para ψ destas definições, uma mantendo y constantes e integrando em relação a x e outra mantendo x constantes e integrando em relação a y. Por exemplo, começando com a equação para $M(x,y)$:

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = (x - y)$$

Integrando em relação a x:

$$\int \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} dx = \int (x - y) dx \qquad \rightarrow \qquad \psi(x,y) = \frac{x^2}{2} - yx + h(y)$$

onde a **função** $h(y)$ é adicionada para representar a dependência em relação a y. Utilizando a segunda equação:

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = (y^2 - x)$$

Utilizando a expressão obtida anteriormente para $\psi(x,y)$:

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} - yx + h(y)\right) = -x + \frac{dh}{dy} = (y^2 - x)$$

de modo que:

$$\frac{dh}{dy} = y^2 \qquad \rightarrow \qquad \int dh = \int y^2 dy \qquad \rightarrow \qquad h(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

Substituindo na equação para $\psi(x,y)$:

$$\psi(x,y) = \frac{x^2}{2} - yx + h(y) = \frac{x^2}{2} - yx + \frac{y^3}{3} + c$$

Como trata-se de uma equação exata, sabe-se que $\psi(x,y) =$ constante:

$$\psi(x,y) = \frac{x^2}{2} - yx + \frac{y^3}{3} + c = k$$

Fazendo $c_1 = c - k$ obtém-se:

$$\psi(x, y) = \frac{x^2}{2} - yx + \frac{y^3}{3} + c_1 = 0$$

A função $y(x)$ não pode ser representada de forma explícita, porém sabe-se que a solução é a família de curvas que satisfaz:

$$\frac{x^2}{2} - yx + \frac{y^3}{3} + c_1 = 0$$

Exemplo 2: Encontre a solução geral da EDO:

$$(2x + 3) + (2y - 2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Lista de Exercícios - Métodos de Resolução de EDO's de 1^a Ordem

01) Resolva os seguintes problemas de valor inicial. Quando possível, verifique se a resposta esta correta substituindo a solução obtida na equação diferencial.

a) $\dfrac{dy}{dt} = t^2 + t + 1 \qquad y(0) = 2$

b) $y^2 \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{t} \qquad y(0) = 1$

R: $y(t) = (2t^{3/2} + 1)^{1/3}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = t^2 y \qquad y(0) = 1$

d) $\dfrac{dy}{dt} + 4ty = t \qquad y(0) = 1$

R: $y(t) = (1 + 3e^{-2t^2})/4$

e) $t\dfrac{dy}{dt} + y = t^2 + 1 \qquad y(2) = 0$

R: $y(t) = (t^3 + 3t - 14)/3t$

f) $\dfrac{dy}{dt} = 4y + t \qquad y(0) = 1/8$

g) $\dfrac{dy}{dt} + ky = e^{2kt} \qquad y(0) = \dfrac{1}{3k}$

R: $y(t) = e^{2kt}/(3k)$

h) $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{3}y = e^t y^4 \qquad y(0) = 1/2$

R: $y(t)^3 = 1/(e^t(8 - 3t))$

i) $t\dfrac{dy}{dt} + y = y^2 t^2 \ln t \qquad y(1) = 1$

R: $y(t) = (t^2 - t^2 \ln(t))^{-1}$

j) $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{t}y = -t^2 \cos(t) y^2 \qquad y(\pi) = 1$

R: $y(t) = (t^2(\sin(t) + \pi^{-2}))^{-1}$

k) $(t^2 - 2y)\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 2ty \qquad y(0) = 4$

R: $t^2 y - t^3 - y^2 + 16 = 0$

l) $2ty\dfrac{dy}{dt} = (t\sin(t) - \cos(t) - y^2) \qquad y(\pi) = 0$

R: $ty^2 + t\cos(t) + \pi = 0$

m) $-2xy\sin(x^2) + \cos(x^2)\dfrac{dy}{dt} = 0 \qquad y(0) = 1$

R: $y = 1/(\cos(x^2))$

n) $e^{-2\theta} - 2re^{-2\theta}\dfrac{d\theta}{dr} = 0 \qquad y(e) = 2$

R: $\theta = 3/2 + \ln(r)/2$

02) Encontre a solução geral da equação:

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty = 2$$

e mostre que as condições iniciais $y(1) = 1$ e $y(-1) = -3$ resultam em condições particulares idênticas. Este resultado viola o teorema da Unicidade?

03) Um tanque com volume total $V_t = 280\,L$ contém inicialmente uma massa $m_0 = 10\,kg$ de sal dissolvidos em um volume $V_0 = 180\,L$ litros de água. Suponha que uma corrente com

vazão $Q_i = 12\,L/min$ seja alimentada ao tanque, contendo uma concentração $C_0 = 0.25\,kg/L$ de sal. Esta alimentação rapidamente se mistura com a solução no tanque, de modo que pode-se considerar que a concentração de sal é igual em todo o tanque. A solução de água é sal é removida do tanque com uma vazão $Q_o = 8\,L/min$.

A variação no volume de solução no tanque ao longo do tempo ($V(t)$) pode ser expressa em termos da diferença entre o que é alimentado e o que é removido:

$$\frac{dV}{dt} = Q_i - Q_o$$

De forma semelhante, a variação na massa de sal presente no tanque ao longo do tempo, $S(t)$, é dada por:

$$\frac{dS}{dt} = C_0 Q_i - \frac{S}{V} Q_o$$

Considerando que $Q_i > Q_o$, determine a quantidade de sal presente no tanque quando este começa a transbordar ($V = V_t$).

R: $S = 55.53\,kg$

7. Introdução às EDO's de 2^a Ordem

7.1. Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

As EDO's de segunda ordem podem ser expressas de forma geral como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Este tipo de equação surge com muita frequência no estudo de diversos sistemas físicos, por exemplo na análise de movimento oscilatório, circuitos elétricos, mecânica dos fluidos, etc.

Durante a resolução de EDO's de segunda ordem, irão surgir duas constantes de integração, ou seja, a solução geral deste tipo de EDO possui duas constantes c_1 e c_2. Por isso, para obter a solução particular, é necessário especificar duas condições conhecidas para obter estas constantes. Um Problema de Valor Inicial (PVI) de segunda ordem é expresso como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0$$

onde y_0 e y'_0 são valores conhecidos. Desta forma, um PVI de segunda ordem utiliza um valor conhecido para a função e para a sua derivada primeira no instante inicial.

Na modelagem de diversos problemas físicos, muitas vezes as condições conhecidas são especificadas em *pontos* diferentes, usualmente nas fronteiras da região onde a equação é resolvida. Por exemplo, no escoamento entre duas placas paralelas, é conhecida a velocidade na superfície em contato com cada uma das placas. Para diferenciar este tipo de condição das condições iniciais, quando especificadas em locais diferentes, as condições conhecidas são chamadas de ***condições de contorno***. Os problemas envolvendo equações de segunda ordem (ou ordem superiores) e condições de contorno conhecidas são chamados de *Problemas de Valor de Contorno* (PVC). Um PVC de segunda ordem pode ser expresso como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

onde a e b são dois pontos do domínio de solução e y_a e y_b são valores conhecidos. De forma equivalente, pode ser conhecido os valores da derivada primeira nas fronteiras, ou o valor da função em uma fronteira e o valor da derivada primeira em outra. De forma geral, a variável independente t é utilizada para representar PVI's, pois usualmente estes problemas envolvem variações no tempo, enquanto que a variável independente x costuma ser utilizada em PVC's, onde normalmente os problemas envolvem variações no espaço.

Assim como para as EDO's de primeira ordem, não existe um método único de solução válido para todos os casos. A seguir serão apresentadas algumas formas de resolução válidas para casos específicos.

7.1.1. Redução de Ordem

Uma equação diferencial de segunda ordem sempre pode ser transformada em um sistema de duas equações de primeira ordem. Por exemplo, considere uma EDO da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

definindo-se $u = dy/dx$, pode-se reescrever a equação anterior como:

$$\frac{du}{dx} = f\left(x, y, u\right)$$

Esta equação, em conjunto com a própria definição de u, é equivalente a equação original.

Em muitos casos, a equação diferencial de segunda ordem pode ser expressa como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

Neste caso, após a redução de ordem, a equação será expressa como

$$\frac{du}{dx} = f\left(x, u\right)$$

Esta equação não depende de y e pode ser resolvida para obter $u(x)$. A partir de $u(x)$, obtém-se $y(x)$.

Exemplo 01: Obtenha a solução para a seguinte EDO:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0$$

Definindo $u = \dfrac{dy}{dx}$, temos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{du}{dx}$$

Assim, a EDO pode ser reescrita como:

$$\frac{du}{dx} + u = -x$$

Esta é uma EDO de primeira ordem linear que pode ser resolvida através do método do fator integrante. A solução geral desta equação é da forma:

$$u(x) = 1 - x + c_1 e^{-x}$$

Para avaliar a solução geral da EDO de segunda ordem, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = u(x) = 1 - x + c_1^{-x} \qquad \rightarrow \qquad y(x) = x - \frac{x^2}{2} - c_1 e^{-x} + c_2$$

7.1.2. Equações Separáveis

Assim como para as EDO's de primeira ordem, em muitos casos é possível expressar a equação como:

$$f(y)\frac{d^2y}{dx^2} = q(x)$$

Neste caso, pode-se integrar ambos os lados da equação duas vezes em relação a x de modo a se obter a função $y(x)$.

Exemplo 2: O perfil de velocidade ($v(x)$) de um fluido escoando entre duas placas planas pode ser obtido a partir da equação:

$$\mu\frac{d^2v}{dx^2} = \Delta P$$

onde μ e ΔP são constantes representando a viscosidade e o diferencial de pressão.

a) Obtenha a solução geral para esta equação.

A equação pode ser escrita como:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\Delta P}{\mu}$$

Integrando em relação a x:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\Delta P}{\mu}x + c_1$$

Integrando novamente:

$$v(x) = \frac{\Delta P}{\mu}\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

b) Considerando que as duas placas estejam paradas e separadas por uma distância $\delta x = 1\,m$ ($v(0) = v(1) = 0$), obtenha a solução particular para este caso.

Neste caso, temos que $v(0) = v(1) = 0$. Considerando primeiramente $v(0) = 0$:

$$0 = c_2$$

Considerando $v(1) = 0$:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{\mu} + c_1 \qquad \rightarrow \qquad c1 = -\frac{1}{2}\frac{\Delta P}{\mu}$$

Assim:

$$v(x) = \frac{\Delta P}{\mu}\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta P}{\mu}\right)x$$

$$v(x) = \frac{\Delta P}{2\mu}\left(x^2 - x\right)$$

Como a resolução da EDO de segunda ordem envolve duas integrações, também é possível que a derivada primeira apareça multiplicada por alguma função, da forma:

$$f(y)\frac{d}{dx}\left(g(x,y)\frac{dy}{dx}\right) = h(x)$$

Se a função $g(x,y)$ também for separável, então a EDO pode ainda ser resolvida por integração simples.

Exemplo 3: A distribuição de temperatura ao longo do raio de uma esfera sólida é dada por:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

Considerando que $T(r_1) = T_1$ e $T(r_2) = T_2$, obtenha a função $T(r)$.

Esta equação pode ser integrada de modo a se obter:

$$r^2\frac{dT}{dr} = c_1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

Integrando novamente:

$$T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

Avaliando as C.C.

$$T_1 = -\frac{c_1}{r_1} + c_2 \qquad\qquad T_2 = -\frac{c_1}{r_2} + c_2$$

Fazendo a eq. para T_1 menos a eq. para T_2:

$$T1 - T2 = \frac{c_1}{r_2} - \frac{c_1}{r_1} = c_1(1/r_2 - 1/r_1)$$

De modo que:

$$c_1 = \frac{T_1 - T_2}{1/r_2 - 1/r_1}$$

Substituindo este valor na eq. para T_1:

$$T_1 = -\frac{c_1}{r_1} + c_2 = -\frac{T_1 - T_2}{r_1(1/r_2 - 1/r_1)} + c_2 \qquad \rightarrow \qquad c_2 = T1 + \frac{T_1 - T_2}{r_1(1/r_2 - 1/r_1)}$$

Substituindo na equação geral:

$$T(r) = -\frac{T_1 - T_2}{r(1/r_2 - 1/r_1)} + T1 + \frac{T_1 - T_2}{r_1(1/r_2 - 1/r_1)} = \frac{T_1 - T_2}{1/r_2 - 1/r_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) + T_1$$

Exercício 01: Resolva o seguinte PVI:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x \qquad y(1) = 2 \qquad y(2) = 1$$

R: $y(x) = (24 - 13x + x^3)/6$

7.2. Equações Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

As EDO's de segunda ordem lineares podem ser escritas de forma geral como:

$$a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = d(t)$$

Caso $d(t) = 0$, a equação é dita homogênea, e caso as funções $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ forem constante (não dependerem de t), a equação possui coeficientes constantes.

Assim, as EDO's de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes podem ser expressas de forma geral como:

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = 0$$

onde A, B e C são constantes e $A \neq 0$

O objetivo é encontrar soluções $y = p(t)$ que satisfaçam esta equação. Considere o exemplo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

Neste caso, deve-se encontrar uma função cuja derivada segunda é igual a própria função. A escolha mais óbvia é $y = e^t$. No entanto, $y = e^{-t}$ também é solução, ou ainda $y = 2e^t$ ou $y = 5e^{-t}$, etc., ou seja, existem infinitas soluções para esta equação.

Suponha que $y(t) = e^{rt}$ seja uma solução da EDO de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, de modo que $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2e^{rt}$:

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = Ar^2e^{rt} + Bre^{rt} + Ce^{rt} = 0$$

Ou ainda:

$$(Ar^2 + Br + C)e^{rt} = 0$$

Como $e^{rt} \neq 0$, isto implica que:

$$(Ar^2 + Br + C) = 0$$

Esta é a chamada ***equação característica*** da EDO. Os valores de r_1 e r_2 que satisfazem esta equação irão gerar soluções $y_1 = e^{r_1}$ e $y_2 = e^{r_2}$ para a EDO de segunda ordem linear, homogênea e com coeficientes constantes. Assim, pode-se perguntar qual é a real solução da equação. A resposta é que ambas são soluções da *equação diferencial*, porém não irão satisfazer possíveis condições iniciais ou de contorno impostas. Assim, deve-se buscar uma solução que, além de satisfazer a equação, satisfaça as condições impostas. Estas soluções são chamadas de soluções fundamentais da equação diferencial.

7.3. Soluções Fundamentais de Equações Lineares Homogêneas

Uma EDO de segunda ordem homogênea linear pode ser expressa de forma geral como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Em muitos casos, é conveniente definir um *operador diferencial* para representar a equação. A equação acima pode ser representa como:

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$$

onde o operador L é expresso como:

$$L = D^2 + p(t)D + q(t) \qquad\qquad D = \frac{d}{dt}$$

Este operador pode ser aplicado em qualquer função ou mesmo equação. Por exemplo, considere que $p(t) = t^2$ e $q(t) = 1 + t$. Se aplicarmos o operador L em $\sin(3t)$:

$$L[\sin(3t)] = \frac{d^2}{dt}(\sin(3t)) + t^2\frac{d}{dt}\sin(3t) + (1 + t)\sin(3t) = 0$$

$$L[\sin(3t)] = -9\sin(3t) + 3t^2\cos(3t) + (1+t)\sin(3t)$$

Um operador L é dito linear se:

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)]$$

Nesta sessão, será avaliado o seguinte Problema de Valor Inicial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y_0'$$

com o objetivo de encontrar uma solução geral $y = \phi(t)$ que satisfaça a equação diferencial juntamente com as duas condições iniciais impostas.

Porém, antes de buscar esta possível solução, deve-se avaliar se *existe* alguma solução e se esta solução é *única*.

Para avaliar a existência e a unicidade de PVI's envolvendo EDO's de segunda ordem, podemos recorrer ao seguinte teorema. Apesar de o objetivo ser avaliar equações homogêneas, este teorema também é válido para EDO's não-homogêneas.

Teorema 01. Existência e Unicidade para Equações Lineares de Segunda Ordem: Considere o seguinte PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y_0^1$$

onde $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ são contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0 e y_0 e y_0^1 são números reais. Então, existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ para este problema, e a solução existe em todo intervalo I.

Este teorema é muito similar ao visto anteriormente para o de primeira ordem. Com base no no teorema anterior podemos concluir que para um PVI linear de segunda ordem existe uma solução única válida no intervalo onde as funções $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ são contínuas.

Exemplo 04: Encontre o intervalo mais amplo onde o seguinte PVI admite solução:

$$(t^2 - t)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t-1)y = 0 \qquad y(1/2) = 0 \qquad y'(1/2) = 1$$

Para deixar a equação na forma padrão, podemos dividir toda a equação por $t^2 - t$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{t}{t^2 - t}\frac{dy}{dt} + \frac{(t-1)}{t^2 - t}y = 0 \qquad y(1/2) = 0 \qquad y'(1/2) = 0$$

onde podemos identificar:

$$p(t) = \frac{t}{t^2 - t} = \frac{1}{t-1} \qquad q(t) = \frac{t-1}{t^2 - t}$$

Estas funções são contínuas a não ser pelos pontos $t = 0$ e $t = 1$. Como o valor inicial é avaliando em $t = 1/2$, o maior intervalo onde a equação possui solução é o intervalo $(0, 1)$.

Como visto anteriormente, uma EDO linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes admite a solução $y(t) = e^{rt}$, onde r são raízes de uma equação de segundo grau. Assim, existem pelo menos duas soluções para a equação (considerando raízes distintas). Para avaliar a solução mais geral possível para a EDO, podemos consi-derar primeiramente o seguinte teorema:

Teorema 2. Princípio da Superposição: Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação diferencial:

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

então a combinação linear $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Com base no teorema anterior, pode-se observar que partindo de duas soluções quaisquer $y_1(t)$ e $y_2(t)$ pode-se formar um conjunto infinito de soluções para a equação diferencial contendo duas constantes c_1 e c_2.

Considere agora o seguinte PVI:

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y_0'$$

Se existirem duas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ que satisfazem a equação, pode-se obter um conjunto infinito de soluções da forma $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, válidas para qualquer valor de c_1 e c_2. Caso for possível encontrar valores de c_1 e c_2 que permitam que as condições iniciais também sejam satisfeitas, será obtida uma solução particular para o PVI.

Assim, devemos determinar se existem constantes c_1 e c_2 que satisfaçam as condições iniciais especificadas.

Considerando as condições impostas, temos que:

$$y(t_0) = y_0 \qquad \rightarrow \qquad c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y_0' \qquad \rightarrow \qquad c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0'$$

Resolvendo para c_1 e c_2, temos que:

$$c_1 = \frac{y_0y_2'(t_0) - y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

$$c_2 = -\frac{y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

Estes resultados também podem ser expressos em termos dos seguintes determinantes, aplicando a regra de Cramer[1]:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}$$

Como todos os termos nas expressões anteriores são valores constantes, a única condição que deve ser satisfeita para que c_1 e c_2 existam é que o denominador seja diferentes de zero. Como o denominador das duas expressões é o mesmo, a condição é expressa como:

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \neq 0$$

Outra maneira de observar que esta condição é necessária é avaliar o sistema de equações para c_1 e c_2 na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

Este sistema somente possui solução se o determinante da matriz 2×2 $\mathbf{A}$ for diferente de zero em $t = t_0$.

Em particular, este determinante é chamado de Wronskiano das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$:

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0)$$

Com isso, pode-se propor o seguinte teorema:

Teorema 3. Conjunto Fundamental de Soluções: Suponha que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação diferencial:

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

e que o wronskiano

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

[1] A solução de um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ será $x_i = |\mathbf{A}_i|/|\mathbf{A}|$, onde $\mathbf{A}_i$ é a matriz formada substituindo a coluna i pelo vetor $\mathbf{b}$

não se anula no ponto $t = t_0$, onde são especificadas as condições inicias:

$$y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0$$

então existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para as quais $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ satisfaz a equação diferencial com as condições de contorno especificadas. Neste caso, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forma um *conjunto fundamental de soluções* para a equação diferencial.

Resta agora avaliar se a solução $y(t) = c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ que satisfaz a condição $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ engloba todas as soluções possíveis. De fato, esta condição é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 4. Solução Geral de EDO's de segunda ordem: Se y_1 e y_2 são duas soluções da EDO:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e se existe um ponto t_0 onde $W(y_1, y_2) \neq 0$, então a família de soluções:

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

inclui todas as soluções do PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad\qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0$$

Este teorema diz que, considerando que $W(y_1, y_2) \neq 0$, a combinação:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

é a solução geral da EDO. Assim, funções y_1 e y_2 formam um ***conjunto fundamental de soluções da EDO***.

Isto implica que para encontrar a solução geral da EDO basta encontrar duas soluções que possuam o Wronskiano não-nulo.

Para provar o Teorema 04, devemos mostrar que uma solução qualquer $\phi(t)$ esta inclusa na família de soluções $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, ou seja, exista alguma combinação de c_1 e c_2 tal que $y(t) = \phi(t)$.

Considere um ponto t_0 onde $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$. Avaliando a solução arbitrária $\phi(t)$ e sua derivada primeira neste ponto, podemos definir:

$$y_0 = \phi(t_0) \qquad\qquad y'_0 = \phi'(t_0)$$

Considere agora o seguinte PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0$$

Como $\phi(t)$ foi definido como uma solução qualquer da equação e as condições iniciais foram definidas como base em $\phi(t)$, certamente $\phi(t)$ é uma solução do PVI.

Porém, do Teorema 03 temos que, considerando $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$, é possível escolher constantes c_1 e c_2 tais que

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

também seja uma solução do PVI.

Considerando agora que $p(t)$ e $q(t)$ sejam contínuas em um intervalo contento t_0 do Teorema 01 sabemos que a solução do PVI deve ser única, portanto:

$$\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

como $\phi(t)$ é uma solução arbitrária, qualquer possível solução está inclusa nesta família.

Os teoremas vistos nesta sessão podem ser resumidos da seguinte forma:

Para encontrar a solução geral da EDO:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \qquad \alpha < t < \beta$$

precisamos, primeiro, encontrar duas soluções y_1 e y_2 que satisfazem a equação diferencial em $\alpha < t < \beta$. Depois, precisamos avaliar se $W(y_1, y_2) \neq 0$ em um ponto t_0 deste intervalo. Caso isto for satisfeito, a solução geral da equação será:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

e as constantes arbitrárias c_1 e c_2 podem ser escolhidas de modo que as condições iniciais especificadas em t_0 sejam satisfeitas.

Exemplo 05: Suponha que $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções da equação:

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = 0 \qquad\qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0$$

Mostre que elas formam um conjunto de soluções fundamentais para qualquer valor de t_0, sendo que r_1 e r_2 são as raízes da equação:

$$Ar^2 + Br + C = 0$$

e $r_1 \neq r_2$.

Lista de Exercícios - Introdução às EDO's de 2ª Ordem

1) Em um processo de tingimento, um fio cilíndrico passa por dentro de uma tubulação onde entra em contanto com o corante. O fio é puxado com a uma velocidade v_0. Nestas condições, a equação que descreve o perfil de velocidade do fluido confinado entre o fio e a tubulação é dada por:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = 0$$

As condições de contorno são dadas por $y(kR) = v_0$ e $y(R) = 0$, onde kR representa o raio do fio ($k < 1$ é uma constante) e R o raio da tubulação. Obtenha o perfil de velocidade.

R: $v = \dfrac{v_0}{\ln k}\ln(r/R)$

2) O perfil de concentração de um gás difundindo através de uma camada de ar estagnado é dado por:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-y)}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

onde y é a fração do gás. Considerando que a fração do gás em $x = x_1$ é de $y(x_1) = y_1$ e em $x = x_2$ é de $y(x_2) = y_2$, mostre que o perfil de concentração $y(x)$ pode ser dado por:

$$\frac{1-y}{1-y_1} = \left(\frac{1-y_2}{1-y_1}\right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

3) Um óleo lubrificante preenche o espaço entre duas placas planas separadas por uma distância de 1 mm, sendo que a placa superior se desloca a uma velocidade v_s e possui uma temperatura T_s, enquanto que a placa inferior está parada e a uma temperatura T_i.

(a) Nestas condições, o perfil de velocidade ($v(y)$) do óleo lubrificante é obtido através da equação:

$$\frac{d^2v}{dy^2} = 0$$

Considerando que $v(0) = 0$ e $v(1) = v_s$, obtenha o perfil de velocidade.

(b) O perfil de temperatura, por sua vez, pode ser obtido pela equação:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{\mu}{k}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2$$

onde μ e k são constantes. Considerando que $T(0) = T_i$ e $T(1) = T_s$, obtenha o perfil de temperatura. **R:** $T(y) = T_i + (T_s - T_i)y + (\mu v_s^2/2k)(y - y^2)$

4) **(Princípio da Superposição)** Mostre que se duas funções $y_1(x) = g(x)$ e $y_2(x) = h(x)$ são soluções da seguinte EDO:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0$$

então qualquer combinação linear destas funções também será uma solução.

5) Mostre que a função

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

é solução da equação diferencial

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = 0$$

onde c_1, c_2, A, B e C são constantes e r_1 e r_2 são as raízes da equação:

$$Ar^2 + Br + C = 0$$

6) Mostre que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação:

$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} - y = 0 \qquad t > 0$$

7) Considere a equação:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

(a) Mostre que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{2t}$ formam um conjunto fundamental de soluções;

(b) Sejam $y_3(t) = -2e^{2t}$, $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ e $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$. $y_3(t)$, $y_4(t)$ e $y_5(t)$ também são soluções da equação diferencial?

(c) Determine se cada par a seguir forma um conjunto fundamental de soluções: $[y_1(t), y_3(t)]$, $[y_2(t), y_3(t)]$, $[y_1(t), y_4(t)]$, $[y_4(t), y_5(t)]$.

8. Equação Característica de EDO's de 2^a Ordem

8.1. Equação Característica

Na aula passada, vimos que as EDO's de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes podem ser expressas de forma geral como:

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = 0$$

onde A, B e C são constantes e $A \neq 0$.

Supondo uma solução da forma $y(t) = e^{rt}$, pode-se mostrar que esta solução satisfaz a equação diferencial para os valores de r que sejam as raízes da *equação característica*

$$Ar^2 + Br + C = 0$$

Assim, considerando o princípio da superposição, a solução pode ser expressa como $y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$, onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica. Para avaliar se esta solução gera um conjunto fundamental de soluções, serão avaliados separadamente os casos onde a equação característica possui raízes reais e distintas, repetidas ou complexas.

8.1.1. Equação Característica com Raízes Reais e Distintas

O caso mais simples ocorre quando a equação característica possui duas raízes reais e distintas. Neste caso, basta substituir as raízes na equação

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

e a solução geral será conhecida.

Avaliando se as soluções correspondem às soluções fundamentais:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2(e^{r_1 t} e^{r_2 t}) - r_1(e^{r_2 t} e^{r_1 t})$$

ou ainda:

$$W(y_1, y_2) = r_2 e^{t(r_1+r_2)} - r_1 e^{t(r_1+r_2)}$$

Para garantir que as funções formam um conjunto fundamental, o Wronskiano deve ser diferente de zero. Assumindo um caso onde $W(y_1, y_2) = 0$, isto resulta em:

$$r_2 e^{t(r_1+r_2)} - r_1 e^{t(r_1+r_2)} = e^{t(r_1+r_2)}(r_2 - r_1) = 0$$

Como a função exponencial será diferente de zero para qualquer valor do expoente, isto segue que a única maneira de satisfazer a igualdade anterior é se $r_2 = r_1$. Porém, estamos considerando o caso onde as raízes são distintas, de modo que por definição $r_1 \neq r_2$, portanto o Wronskiano nunca será nulo, independente do ponto onde as condições iniciais serão aplicadas.

Exemplo 01: Obtenha a solução geral da seguinte EDO:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

e a solução particular considerando que $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

Exemplo 02: Obtenha a solução particular do seguinte PVI:

$$4y'' - 8y' + 3y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = \frac{1}{2}$$

A equação característica será:

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

de modo que as raízes serão

$$r_1 = \frac{3}{2} \qquad\qquad r_2 = \frac{1}{2}$$

e a solução geral será da forma:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2}$$

Avaliando a condição $y(0) = 2$

$$2 = c_1 + c_2$$

A derivada da solução geral será:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3c_1}{2}e^{3t/2} + \frac{c_2}{2}e^{t/2}$$

de modo que a condição $y'(0) = 1/2$ retorna:

$$\frac{1}{2} = \frac{3c_1}{2} + \frac{c_2}{2}$$

Resolvendo o sistema linear, obtém-se:

$$c_1 = -\frac{1}{2} \qquad\qquad c_2 = \frac{5}{2}$$

Assim, a solução particular será:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}$$

8.1.2. Equação Característica com Raízes Complexas

Considere agora o caso onde as raízes da equação característica são complexas. Lembrando que as raízes complexas de equações de segundo grau sempre são complexos conjugados, as raízes podem ser escritas como:

$$r_1 = a + bi \qquad r_2 = a - bi$$

A solução geral neste caso é dada por:

$$y(t) = c_1e^{(a+bi)t} + c_2e^{(a-bi)t} = c_1e^{at}e^{bti} + c_2e^{at}e^{-bti}$$

Colocando e^{ax} em evidência:

$$y(t) = e^{at}(c_1e^{bti} + c_2e^{-bti})$$

Para facilitar a manipulação da equação, é conveniente expressar a parte exponencial em termos de funções trigonométricas através do uso da fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Considerando a fórmula de Euler, a expressão para $y(t)$ parte complexa pode ser reescrita como:

$$y(t) = e^{at}(c_1(\cos(bt) + i\sin(bt)) + c_2(\cos(-bt) + i\sin(-bt)))$$

Considerando ainda as identidades trigonométricas $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ e $\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$, a equação retorna:

$$y(t) = e^{at}((c_1 + c_2)\cos(bt) + (c_1 i + c_2 i)\sin(bt))$$

Como c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, pode-se definir $c_3 = c_1 + c_2$ e $c_4 = c_1 i + c_2 i$. Assim:

$$y(t) = c_3 e^{at}\cos(bt) + c_4 e^{at}\sin(bt) = c_3 y_1(t) + c_4 y_2(t)$$

Para garantir que esta solução corresponde a solução geral da EDO e que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ formam um conjunto de soluções fundamentais, precisamos avaliar o Wronskiano $W(y_1, y_2)$. A derivada das soluções é:

$$\frac{dy_1}{dt} = ae^{at}\cos bt - b\sin bte^{at} \qquad \frac{dy_2}{dt} = ae^{at}\sin bt + b\cos bte^{at}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ ae^{at}\cos bt - b\sin bte^{at} & ae^{at}\sin bt + b\cos bte^{at} \end{vmatrix}$$

Após simplificar a resposta, obtém-se que:

$$W = be^{2at}$$

Assim, o Wronskiano só é nulo se $b = 0$. Porém, caso $b = 0$ a equação característica possui duas raízes reais e pode-se utilizar as soluções vistas anteriormente.

Exemplo 03: Resolva o seguinte PVI:

$$y'' + y' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

8.1.3. Equação Característica com Coeficientes Repetidos

Quando a equação característica possui duas raízes idênticas ($r_1 = r_2 = r$), somente uma solução exponencial pode ser obtida:

$$y(t) = c_1 e^{rt}$$

No entanto, esta não é a solução mais geral possível. Utilizando o método de D'Alembert, pode-se mostrar que uma segunda solução pode ser dada por:

$$y(t) = c_2 te^{rt}$$

Com isso, a solução geral para a EDO será:

$$y(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt} = e^{rt}(c_1 + c_2t)$$

Avaliando se as soluções correspondem a soluções fundamentais:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rt} & re^{rt} \\ re^{rt} & e^{rt} + r^2e^{rt} \end{vmatrix} = e^{2rt} + rte^{2rt} - rte^{2rt} = e^{2rt}$$

Como a função exponencial nunca é 0, as soluções propostas são um conjunto de soluções fundamentais.

Exemplo 04: Resolva o seguinte PVI:

$$y'' - y' + \frac{y}{4} = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 2$$

8.2. Equações Não-Homogêneas: Método dos Coeficientes Indeterminados

Considere agora o caso de uma EDO de segunda ordem linear e não-homogênea:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

onde $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ são contínuas em um intervalo abeto I. A equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

é chamada de equação homogênea associada a equação original.

Para buscar uma solução geral para a equação não-homogênea, vamos primeiramente considerar o seguinte teorema:

Teorema 01: A solução geral da EDO:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

pode ser escrita da forma:

$$y(t) = y_h(t) + y_n(t)$$

onde $y_h(t)$ é a solução da equação homogênea associada e $y_n(t)$ é *alguma* solução específica da equação não-homogênea.

Desta forma, para encontrar a solução geral da EDO não-homogênea, deve-se buscar alguma solução para a equação. Em conjunto com a solução da equação homogênea associada, estas funções irão compor a solução geral.

Dentre os métodos para encontrar soluções para a equação não-homogênea, o mais simples é o método dos coeficientes indeterminados, que consiste em supor um formato para a solução $y_n(t)$ contendo um determinado número de coeficientes e então determinar os valores destes coeficientes através da EDO.

O formato escolhido para $y_n(t)$ a solução irá depender da função $g(t)$. De forma geral, este método só funciona para funções $g(t)$ relativamente simples. como polinômios, exponenciais, seno e co-seno. No entanto, a maior parte das aplicações que envolvem equações não-homogêneas costumam apresentar estas funções como parte não-homogênea.

Exemplo 05: Encontre a solução geral da seguinte EDO:

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

O primeiro passo é obter a solução da equação homogênea:

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

Fazendo $y = e^{rt}$, obtém-se a seguinte equação característica:

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

As raízes desta equação são $r_1 = 4$ e $r_2 = -1$. Assim, a solução da equação homogênea será:

$$y_h(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$$

O segundo passo é encontrar alguma função que satisfaça a equação não-homogênea. Neste caso, o mais plausível é supor que a solução seja uma função exponencial:

$$y_n(t) = A_n e^{2t}$$

onde A_n é o coeficiente a ser determinado. Caso seja possível obter algum valor para A_n que satisfaça a equação, então $y_n(t)$ é uma solução. Caso não seja possível, deve-se tentar alguma outra função.

Substituindo $y_n(t)$ na equação não-homogênea:

$$\frac{d^2(A_n e^{2t})}{dt^2} - 3\frac{d(A_n e^{2t})}{dt} - 4(A_n e^{2t}) = 3e^{2t}$$

Avaliando as derivadas:

$$4A_n e^{2t} - 6A_n e^{2t} - 4A_n e^{2t} = 3e^{2t} \qquad \rightarrow \qquad -6A_n = 3 \qquad \rightarrow \qquad A_n = -1/2$$

Assim, a solução da equação não-homogênea será:

$$y_n(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

A solução geral da EDO será a soma da solução da equação homogênea a da solução da equação não-homogênea:

$$y(t) = y_h(t) + y_n(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Exemplo 06:

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin(t)$$

A solução da parte homogênea é igual ao caso anterior, assim:

$$y_h(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$$

Para avaliar a equação não-homogênea, deve-se supor um formato para a solução. A função $f(t)$ envolve a função seno, então é plausível supor que a solução $y_n(t)$ envolva as funções seno e cosseno, já que a derivada primeira do cosseno e a derivada segunda do seno retornam valores em função de senos.

Assim, será assumido que:

$$y_n(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$$

Avaliando as derivadas primeira e segunda desta função:

$$\frac{dy_n}{dt} = A\cos(t) - B\sin(t)$$

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = -A\sin(t) - B\cos(t)$$

Substituindo estas expressões na EDO:

$$-A\sin(t) - B\cos(t) - 3(A\cos(t) - B\sin(t)) - 4(A\sin(t) + B\cos(t)) = 2\sin(t)$$

Agrupando os termos:

$$(-A + 3B - 4A)\sin(t) + (-B - 3A - 4B)\cos(t) = 2\sin(2t)$$

$$(3B - 5A)\sin(t) + (-3A - 5B)\cos(t) = 2\sin(t)$$

Para encontrar os coeficientes A e B, deve-se igual aos coeficientes dos mesmos termos do lado direito da equação. Como não existe nenhum termo envolvendo cosseno no lado direito, considera-se que seu coeficiente é zero. Assim:

$$3B - 5A = 2 \qquad\qquad -3A - 5B = 0$$

Multiplicando a primeira equação por 5/3 e somando com a segunda equação, temos que:

$$-\frac{25}{3}A - 3A = \frac{10}{3} \qquad \rightarrow \qquad -\frac{34}{3}A = \frac{10}{3} \qquad \rightarrow \qquad A = -\frac{5}{17}$$

Substituindo na segunda equação:

$$-3\left(-\frac{5}{17}\right) = 5B \qquad \rightarrow \qquad = \frac{15}{17} = 5B \qquad \rightarrow \qquad B = \frac{3}{17}$$

Assim, a solução da equação não-homogênea será:

$$y_n(t) = -\frac{5}{17}\sin(t) + \frac{3}{17}\cos(t)$$

A solução geral da EDO será a soma da solução da equação homogênea a da solução da equação não-homogênea:

$$y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - \frac{5}{17}\sin(t) + \frac{3}{17}\cos(t)$$

Exemplo 07:

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2$$

A solução da parte homogênea é igual ao caso anterior, assim:

$$y_h(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t}$$

Para avaliar a equação não-homogênea, deve-se supor um formato para a solução. Como a parte não homogênea é um polinômio de segundo grau, será considerado que

$$y_n(t) = At^2 + Bt + C$$

de modo que

$$\frac{dy_n}{dt} = 2At + B$$
$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = 2A$$

Substituindo estes valores na EDO:

$$2A - 3(2At + B) - 4(At^2 + Bt + C) = 4t^2$$

Agrupando os termos de mesma ordem:

$$-4At^2 + (-6A - 4B)t + (2A - 3B - 4C) = 4t^2 + 0t + 0$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesma ordem:

$$-4A = 4 \qquad -6A - 4B = 0 \qquad 2A - 3B - 4C = 0$$

Da primeira equação, temos que $A = -1$. Substituindo na segunda equação, obtém-se que $B = 3/2$ e na terceira $C = -13/8$. Assim, a solução da equação não-homogênea será:

$$y_n(t) = -t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{13}{8}$$

E a solução geral da EDO será:

$$y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{13}{8}$$

De forma simplificada, na tabela a seguir são apresentados possíveis valores para $y_n(t)$ que podem ser aplicados dependendo do formato de $g(t)$

$\mathbf{g(t)}$	$\mathbf{y_n(t)}$
c_1e^{at}	Ae^{at}
$c_1t + c_2$	$At + B$
c_1t^2	$At^2 + Bt + C$
$c_1\cos(at) + c_2\sin(at)$	$A\cos(at) + B\sin(at)$
$c_1e^{at}\cos(bt)$	$e^{at}(A\cos(bt) + B\sin(bt))$
$c_1e^{at}\sin(bt)$	$e^{at}(A\cos(bt) + B\sin(bt))$

8.2.1. Somatório de funções distintas

Caso a parte não-homogênea da EDO for representada pela soma de mais de uma função, a solução geral será a soma das soluções referentes a cada função.

Exemplo 08:

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\sin(t) + 4t^2$$

A solução desta equação será a soma da solução da equação homogênea e das soluções obtidas considerando cada uma das funções do lado direito (exemplos anteriores):

$$y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{5}{17}\sin(t) + \frac{3}{17}\cos(t) - t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{13}{8}$$

Lista de Exercícios 07 - Equação Característica de EDO's de 2ª Ordem

1) Mostre que $y(t) = te^{rt}$ é uma solução da equação:

$$Ay'' + By' + Cy = 0$$

onde A, B e C são constantes.

2) Encontre a solução geral das seguintes EDO's homogêneas e resolva os problemas de valor inicial e de contorno.

a) $4\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1.5$

R: $y(t) = e^{t/2} - 2te^{t/2}$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1$

R: $y(t) = e^{-t}(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + 2\cos(\sqrt{3}t))$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad y'(0) = 1$

R: $y(t) = (3 + 7t)e^{-2t}$

d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

R: $y(t) = e^{-2t}(\cos(t) + 2\sin(t))$

e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

R: $y(t) = (3/5)e^{2x} + (2/5)e^{-3x}$

f) $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad y'(0) = -4$

R: $y(t) = 2e^{-3t/2} + e^{-t}$

g) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \qquad y(\pi/4) = -3 \qquad y'(\pi/4) = 4$

R: $y(t) = 3\cos(4x) - \sin(4x)$

h) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1$

R: $y(t) = e^{-t}(2\cos(t) + 3\sin(t))$

i) $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

R: $y(x) = e^{3t/4}(\cos(\sqrt{7}t/4) - (3/\sqrt{7})\sin(\sqrt{7}t/4))$

j) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y(\pi/2) = 1$

R: $y(x) = e^{-2x}(2\cos(3x) - e^{\pi}\sin(3x))$

3) Encontre a solução geral das seguintes EDO's não-homogêneas e resolva os problemas de valor inicial.

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 3e^{-x} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$

R: $y(x) = -1/3e^{2x} + e^{2x}t + 1/3e^{-x}$

b) $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$

R: $y(x) = -4e^{-x/2}\cos(x/2) + 4e^{-x/2}\sin(x/2) + (t-2)^2$

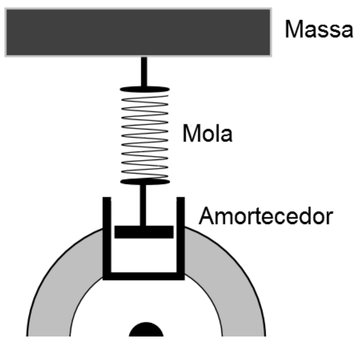
c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2.25y = 27(x^2 - x) \qquad y(0) = 20 \qquad y'(0) = 30$

R: $y(x) = 4((1+x)e^{1.5x} + 3x^2 + 5x + 4)$

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 2\sin(4x) \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$

R: $y(x) = (1/25)(8e^{3x} - 10e^{2x} + 2\cos(4x) - \sin(4t))$

4) Considere o seguinte esquema de um sistema de absorção de impacto.



A equação de conservação de momento pode ser descrita em termos do deslocamento vertical (x) da massa, sendo dada por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} - nx$$

onde m é a massa total, kdx/dt representa a força de amortecimento e nx a força restauradora resultante da ação da mola (m, k e n são constantes).

Considere que a massa é deslocada inicialmente por uma distância x_0 e liberada, de modo que $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

a) (**Sem Amortecimento**) Considere inicialmente o caso onde não existe amortecimento no sistema ($k = 0$). Neste caso, o sistema entra em um movimento harmônico e permanece em movimento por um tempo indefinido. Obtenha a solução particular para este caso.

R: $x(t) = x_0 \cos(\sqrt{n/m}t)$

b) (**Sub-amortecimento**) Quando $k^2 < 4mn$, ocorre um sub-amortecimento do sistema. Neste caso, o sistema inicialmente oscila com uma amplitude que decresce com o tempo. Obtenha a solução particular para este caso.

R: $x(t) = e^{-kt/2m}(x_0 \cos(\mu t/2m) + (kx_0/2m)\sin(\mu t/2m)),\ \mu^2 = 4mn - k^2$

c) (**Sobre-amortecimento**) Quando $k^2 > 4mn$, ocorre um sobre-amortecimento do sistema, ocorrendo um amortecimento sem a presença de oscilações. Obtenha a solução particular para este caso.

R: $x(t) = (x_0/(1 - \lambda_1/\lambda_2))(e^{\lambda_1 x} - (\lambda_1/\lambda_2)e^{\lambda_2 x})$, $\lambda_1 = (v - k)/2m$, $\lambda_2 = (-v - k)/2m$, $v^2 = k^2 - 4mn$

d) (**Amortecimento crítico**) Quando $k^2 = 4mn$, ocorre uma situação chamada de amortecimento crítico, sendo este o limite entre o sub e sobre-amortecimento. Obtenha a solução particular para este caso.

R: $x(t) = x_0 e^{-kt/2m} + (kx_0/2m)te^{-kt/2m}$

e) (**Oscilação Forçada**) Considere agora que a massa é sujeita a uma força contínua após a perturbação inicial. Neste caso, a equação pode ser dada por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + nx = F\cos(\omega t)$$

Assumindo que $m = n = 1$, $k = 0$ e $\omega = 2$, obtenha a solução particular para este caso.

R: $x(t) = (x_0 + F/3)\cos(t) - (F/3)\cos(2t)$

9. Introdução à Transformada de Laplace

Em análise matemática, uma transformada é um operador que transforma uma função de um dado domínio (por exemplo, o domínio temporal) para outro domínio. Em muitos casos, problemas que são complexos em um dado domínio podem ser facilmente resolvidos em outro domínio e, após resolvidos, pode-se trazer a solução de volta para o domínio original.

A transformada de Laplace faz parte de um grupo de transformadas chamadas de ***Transoformadas Integrais***. Estas transformadas utilizam o conceito de integral para representar uma função no domínio do tempo $f(t)$ em outro domínio, normalment chamado de *domínio de frequência*. Estas transormadas são defindas de forma geral como:

$$T[f(t)] = F(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,u)f(t)dt$$

onde u representa a variável independete no domínio da frequência e $K(t,u)$ é uma função chamada de núcleo da transformada ou ***kernel***. Dependendo dos limites t_1 e t_2 e do kernel escolhido, obtém-se diferentes transformadas. As mais importantes na engenharia são as transformadas de Fourier e de Laplace.

A transformada de Fourier é obtida fazendo $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$ e $K(t,u) = e^{2\pi iut}$ e é uma ferramenta indispensável em diversas áreas, como por exemplo na análise de equações diferenciais parciais, processamento de sinais e mecânica quântica.

No momento, nosso interesse é avaliar a Transformada de Laplace, que é obtida fazendo $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$ e $K(t,u) = e^{2\pi iut}$. Por conveniência, a variável independente no domínio da frequência (neste caso também chamado de domínio de Laplace) é chamada de s. Assim, a transformada de Laplace é um operador que transforma uma função do *domínio do tempo* para do *domínio de Laplace*:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \to F(s)$$

onde t e s representam a variável independente no domínio do tempo e de Laplace, respectivamente.

Este operador é definido como:

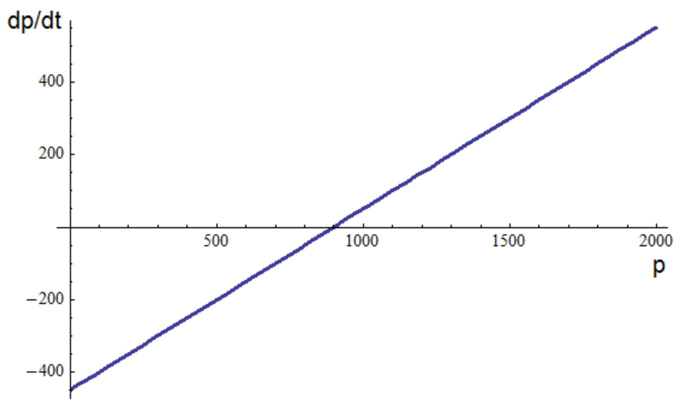
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

onde $f(t)$ é alguma função que possui integral definida para $t \geq 0$. Como visto, a definição da transformada envolve uma integral imprópria. Antes de prosseguir no estudo da Transformada de Laplace, será apresentada uma breve revisão sobre integrais impróprias.

9.1. Integrais Impróprias

Integrais impróprias são integrais definidas onde pelo menos um dos limites de integração tende ao infinito (tipo 1) ou existe alguma descontinuidade infinita no intervalo de integração (tipo 2). Por exemplo, considere as seguintes integrais impróprias do tipo 1 e tipo 2, respectivamente:

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \qquad\qquad g(x) = \int_0^{1} \frac{1}{x^2} dx$$



Para a obtenção da Transformada de Laplace, só nos interessam as integrais impróprias do tipo 1, como apresentado a seguir.

9.1.1. Integrais com Intervalos Infinitos

Considere a função $f(x) = 1/x^2$ integrada desde 1 até um ponto b qualquer. A integral representa a área abaixo da curva entre estes dois pontos ($S(b)$):

$$S(b) = \int_1^{b} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

Para nenhum valor de $b > 1$ esta área será maior que 1. Conforme o valor de t aumenta, mais a integral se aproxima de 1. Assim:

$$\lim_{b\to\infty} S(b) = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$

Assim, mesmo sendo avaliada em um intervalo infinito, a integral converge para um valor finito.

O mesmo procedimento pode ser usado para definir integrais impróprias com limites infinitos de forma geral como:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ou

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_b^a f(x)dx$$

Estas integrais são convergentes caso os limites existam e divergentes caso os limites não existam.

Exemplo 01: Obtenha a transformada da função $f(t) = 1$.

Substituindo a função na definição da transformada:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt$$

Considerando que $s > 0$, esta integral pode ser avaliada como:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}dt$$

Resolvendo a integral:

$$\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{s}(e^{-sb} - 1) \right)$$

Neste ponto, para avaliar a integral, deve-se analisar a influência do termo s. Se $s < 0$, o termo $-sb$ será positivo e ponto, no limite de $b \to \infty$ a integral irá divergir (irá tender ao infinito). Assim, caso $s < 0$, a integral imprópria diverge e a transformada não existe. No entanto, se $s > 0$, o termo e^{-sb} tende a zero conforme $b \to \infty$. Assim, assumindo $s > 0$:

$$\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{s}(e^{-sb} - 1) \right) = \frac{1}{s}$$

Dessa forma, a transformada da função $f(t) = 1$ pode ser expressa como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s} \qquad\qquad s > 0$$

Exemplo 02: Obtenha a transformada da função $f(t) = e^{at}$.

Substituindo a função na definição da transformada:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}dt$$

Resolvendo a integral:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^b\right) = \frac{1}{a-s}(e^{(a-s)b}-1)$$

Novamente, caso $a - s > 0$, a integral irá divergir e portando a transformada não existe. Considerando então que $s > a$, a integral resulta em:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad\qquad s > a$$

Observe que caso $a = 0$ obtém-se a solução do exemplo anterior.

9.2. Existência da Transformada

Para que a transformada de uma função $f(t)$ exista, é necessário que a integral imprópria resultante da substituição de $f(t)$ na definição da transformada seja convergente. Para isso, é necessário que a função $f(t)$ seja contínua por partes e "cresça" de uma forma mais lenta que a parte exponencial. Isto pode ser expresso como:

$$|f(t)| \leq Me^{at} \qquad\qquad \forall\, t > 0$$

onde $M > 0$ e a é algum valor real. Esta relação também pode ser expressa como:

$$\lim_{t\to\infty}|e^{-at}f(t)| = 0$$

Esta condição é suficiente, mas não necessária, para que uma função contínua por partes possua possua uma transformada definida para $s > a$.

Exemplo 03: Avalie se as seguintes funções possuem transformada de Laplace.

a) $f(t) = t^2$

Avaliando o limite, temos que:

$$\lim_{t\to\infty}|e^{-at}t^2| = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{at}}$$

Neste caso, fica claro que o limite tanto do denominador quanto do nominador tende ao infinito. Assim, pode-se usar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{ae^{at}}$$

Novamente, tem-se uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando L'Hôpital novamente:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2t}{ae^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{a^2e^{at}}$$

Este limite tende a zero desde que $a > 0$, portanto, a transformada da função t^2 existe para $s > 0$.

b) $f(t) = e^{t^2}$

Avaliando o limite, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-at}e^{t^2}| = \lim_{t\to\infty} e^{t^2-at}$$

Avaliando o limite do expoente:

$$\lim_{t\to\infty} t^2 - at = \lim_{t\to\infty} t^2\left(1 - \frac{a}{t}\right) = \infty$$

Como consequência, $\lim_{t\to\infty} |e^{-at}e^{t^2}| = \infty$ e portanto a transformada não existe.

9.3. Linearidade da Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um operador linear. Considere duas funções $f(t)$ e $g(t)$ que possuem transformada e duas constantes c_1 e c_2, a linearidade do operador implica que:

$$\mathcal{L}\{c_1f(t) + c_2g(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f(t)\} + c_2\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Esta propriedade é uma consequência direta do fato de que a integração é um operador linear. No entanto, é uma propriedade essencial para a resolução de problemas mais complexos.

Exemplo 04: Obtenha a transformada da função $f(t) = c_1e^{at}+c_2e^{-at}$ e utilize o resultado para obter a transformada das funções $\sinh(at)$ e $\cosh(at)$.

Do exemplo anterior, temos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Assim:

$$\mathcal{L}\{c_1e^{at} + c_2e^{-at}\} = c_1\mathcal{L}\{e^{at}\} + c_2\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{c_1}{s-a} + \frac{c_2}{s+a}$$

Considerando que $\sinh(at) = (e^{at} - e^{-at})/2$, pode-se obter esta função fazendo-se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = -1/2$. Assim:

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a)-(s-a)}{(s+a)(s-a)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{s^2-a^2}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

Da mesma forma, $\cosh(at) = (e^{at}+e^{-at})/2$ pode ser obtido fazendo-se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 1/2$:

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a)+(s-a)}{(s+a)(s-a)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-a^2}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

9.4. Deslocamento na Frequência

A definição da transformada de Laplace da função $f(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Considere o caso onde deseja-se obter a transformada de uma função $g(t) = e^{bt}f(t)$:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{bt}f(t))dt = \int_0^\infty e^{-(s-b)t}f(t)dt$$

Fazendo $s - b = \sigma$, temos que:

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma)t}f(t)dt = F(\sigma) = F(s-b)$$

Assim:

$$\mathcal{L}\{e^{bt}f(t)\} = F(s-b)$$

Exemplo 05: Obtenha a transformada da função $f(t) = e^{-2t}\cos(3t)$

A transformada da função $g(t) = \cos(3t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = G(s) = \frac{s}{s^2+3^2}$$

Usando o princípio do deslocamento de frequência, a transformada da função $f(t)$ será:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)\} = G(s+2) = \frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2} = F(s)$$

Notas Sobre Expansão em Frações Parciais

A expansão em frações parciais é empregada para simplificar a razão entre polinômios como a soma de termos com denominadores mais simples:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$$

Um polinômio $g(x)$ pode ser escrito como a multiplicação dos termos (x - raízes). Por exemplo:

$$x^2 - 3x - 40 = (x+5)(x-8)$$

Exemplo: Raízes distintas:

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-8} = \frac{(x-8)A + (x+5)B}{(x+5)(x-8)}$$

Deve-se igualar os termos de mesma ordem, de onde se obtém que:

$$A + B = 1 \qquad -8A + 5B = 3 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{2}{13} \qquad B = \frac{11}{13}$$

Assim:

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40} = \frac{2/13}{x+5} + \frac{11/13}{x-8}$$

Exemplo: Raízes Repetidas: Quando o denominador possui raízes repetidas, pode-se elevar um dos termos (x-raíz) ao quadrado.

$$\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + B(s(s+2)) + Cs}{s(s+2)^2}$$

$$= \frac{A(s^2+4s+4) + B(s^2+2s) + Cs}{s(s+2)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (4A+2B+C)s + 4A}{s(s+2)^2}$$

de onde se obtém que:

$$A = \frac{1}{4} \qquad B = -\frac{1}{4} \qquad C = \frac{1}{2}$$

O que implica que:

$$\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{2(s+2)^2}$$

Exemplo: Raízes Complexas

- Quando o denominador possuir raízes complexas (irredutível), pode-se manter o termo que possui as raízes complexas em sua forma original. Neste caso, o nominador deixa de ser uma constante e passa a ser um polinômio com grau N-1, onde N é o grau do denominador. Por exemplo:

$$\frac{s+1}{s^2(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s^2+4s+5)}$$

O termo $Cs+D$ é empregado pois o denominador deste termo contém duas raízes. Assim:

$$\frac{s+1}{s^2(s^2+4s+5)} = \frac{s(s^2+4s+5)A + (s^2+4s+5)B + s^2(Cs+D)}{s^2(s^2+4s+5)}$$

$$= \frac{(A+C)s^3 + (4A+B+D)s^2 + (5A+4B)s + 5B}{s^2(s^2+4s+5)}$$

De onde se obtém que:

$$B = \frac{1}{5} \qquad A = \frac{1}{25} \qquad C = -\frac{1}{25} \qquad D = -\frac{9}{25}$$

Em muitos casos, para avaliar o termo quadrático no denominador, é preciso escrever o polinômio de segundo grau $g(s)$ da forma:

$$g(s) = (s-a)^2 + b = (s^2 - 2as + a^2) + b$$

Pode-se primeiramente ajustar o termo a e depois avaliar b. Por exemplo:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + b = s^2 + 4s + 4 + b$$

Para que a equação se igual ao polinômio original, deve-se fazer $4+b=5$ de modo que $b=1$. Assim:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1$$

Exemplo:

(a)Expanda o seguintes termo em frações parciais.

$a)\dfrac{3x+11}{x^2-x-6}$

As raízes do denominador são:

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$$

Assim, podemos escrever o termo como:

$$\frac{3x+11}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Tirando o mínimo, temos:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(x-3)A + (x+2)B}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

Igualando com os termos de mesma ordem do nominador:

$$A + B = 3 \qquad \rightarrow \qquad A = 3 - B$$

$$-3A + 2B = 11 \qquad \rightarrow \qquad -3(3 - B) + 2B = 11 \qquad \rightarrow \qquad -9 + 3B + 2B = 11$$

$$\rightarrow \qquad 5B = 20 \qquad \rightarrow \qquad B = 4 \qquad \rightarrow \qquad A = -1$$

Assim:

$$\frac{3x + 11}{x^2 - x - 6} = \frac{-1}{x + 2} + \frac{4}{x - 3}$$

(b) Escreva o seguinte polinômio da forma $(x - a)^2 + b$

$$2x^2 + 6x + 8 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 + 3x + 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (x + 3/2)^2 + b = 0$$

$$\rightarrow \qquad x^2 + 2x + 9/4 + b = 0 \qquad \rightarrow \qquad 9/4 + b = 4 \qquad \rightarrow \qquad b = 4 - 9/4 = 7/4$$

Assim:

$$2x^2 + 6x + 8 = (x + 3/2)^2 + 7/4$$

9.5. Transformada de Laplace Inversa

A resolução de problemas utilizando a transformada de Laplace usualmente envolve uma etapa onde deve-se trazer a informação de volta para o domínio do tempo. Neste caso, conhecendo-se a função $F(s)$ deve-se encontrar uma função $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. A transformação inversa é representada como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

A maneira mais simples de realizar esta operação é simplificar $F(s)$ de maneira algébrica até se obter funções cuja transformada inversa são conhecidas (tabeladas).

Exemplo 06: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{4s + 10}{s^2 + 6s + 8}$$

A relação entre os polinômios pode ser expandida usando-se o conceito de frações parciais. Determinando as raízes do denominador:

$$r_1 = \frac{-6 + \sqrt{36 - 32}}{2} = -2 \qquad r_2 = \frac{-6 - \sqrt{36 - 32}}{2} = -4$$

Assim, a expansão é dada como:

$$\frac{4s+10}{s^2+6s+8} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4} = \frac{(s+4)A+(s+2)B}{(s+2)(s+4)}$$

De onde se obtém que:

$$A+B=4 \qquad 4A+2B=10 \qquad \rightarrow \qquad 4A+2(4-A)=10 \qquad \rightarrow \qquad 2A=2$$

de modo que:

$$A=1 \qquad B=3$$

Assim:

$$\frac{4s+10}{s^2+6s+8} = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+4}$$

Avaliando a transformada inversa dos termos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

Com base na transformada da função exponencial, pode-se ver que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t}$$

De forma que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{-2t} + 3e^{-4t}$$

Exemplo 07: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{2s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+16}$$

Usando a linearidade da transformada, pode-se avaliar a transformada inversa de cada um dos termos separadamente. O primeiro termo pode ser avaliado como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+25}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5^2}\right\} = 2\cos(5t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+16}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4^2}\right\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\} = \frac{3}{4}\sin(4t)$$

Assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2\cos(5t) + \frac{3}{4}\sin(4t)$$

Exemplo 08: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{1}{(s-4)^3}$$

A transformada pode ser avaliada como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2!}\frac{2!}{(s-4)^{2+1}}\right\}$$

Usando o princípio do deslocamento na frequência

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2!}\frac{2!}{(s-4)^{2+1}}\right\} = \frac{1}{2!}e^{4t}t^2$$

Exemplo 09: Encontre a transformada inversa da função:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 8s + 25}$$

Avaliando as raízes do denominador, obtém-se raízes complexa $4 \pm 3i$. Uma alternativa neste caso é buscar completar o termo quadrado de forma a deixar o denominador na forma $(s-a)^2 + b$.

A expansão da função quadrática é da forma $s^2 + 2as + a^2$. Assim, pode-se avaliar o denominador como:

$$(s-4)^2 = s^2 - 8s + 16$$

Para compensar o termo $a^2 = 16$, diminui-se este valor da expressão final. Assim:

$$s^2 - 8s + 25 = (s-4)^2 - 16 + 25 = (s-4)^2 + 9$$

Avaliando a transformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 8s + 25}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2 + 9}\right\}$$

Observando a semelhança com a transformada da função seno, podemos escrever a transformada como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{(s-4)^2 + 3^2}\right)\right\}$$

Onde pode-se observar a transformada da função seno deslocada por $a = 4$. Assim, a função $f(t)$ será:

$$f(t) = \frac{1}{3}e^{4t}\sin(3t)$$

Exemplo 10: Obtenha a Transformada de Laplace Inversa das seguintes funções:

$$a) F(s) = \frac{6}{s} + \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3}$$

$$b) F(s) = \frac{s+2}{s(s^2-s-12)}$$

$$c) F(s) = \frac{s}{s^2+2s+5}$$

$$d) F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

Lista de Exercícios - Introdução à Transformada de Laplace

01) Demonstre a obtenção da transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) = 1 - 2e^{-2t}$

b) $f(t) = t$

c) $f(t) = t^2 + t$

2) Faça a expansão em frações parciais para os seguintes termos. Quando o denominador possuir raízes complexas, escreva os polinômios de segundo grau da forma $(x-a)^2 + b$.

a) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 3x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7x + 12}{(x+1)(x^2 + 2x + 5)}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x^3 - x)}$

d) $f(x) = \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

3) Obtenha a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{20}{(s-1)(s+4)}$

R: $f(t) = 4e^{-4t}(-1 + e^{5t})$

b) $F(s) = \dfrac{2s+16}{s^2 - 16}$

R: $f(t) = e^{-4t} + 3e^{4t}$

c) $F(s) = \dfrac{10}{2s + \sqrt{2}}$

R: $f(t) = 5e^{-t/\sqrt{2}}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$ $\quad a \neq b$

R: $f(t) = e^{-at}/(b-a) + e^{-bt}/(a-b)$

e) $F(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$ $\quad a = b$

R: $f(t) = te^{-at}$

f) $F(s) = \dfrac{2s+5}{s^2 - 25}$

R: $f(t) = (1/2)e^{-5t}(1 + 3e^{10t})$

g) $F(s) = \dfrac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$

R: $f(t) = e^{-4t}(6 - 6e^{t} + e^{2t})$

h) $F(s) = \dfrac{s+4}{(s+1)^2}$

R: $f(t) = e^{-t}(1 + 3t)$

i) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 1}$

R: $f(t) = (2/\sqrt{3})e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$

10. Resolução de EDO's com a Transformada de Laplace

Uma das principais utilidades da transformada de Laplace é a resolução de Problemas de Valor Inicial. Como será visto a seguir, a aplicação da transformada em uma equação diferencial resulta em uma equação algébrica no domínio de Laplace, que pode ser facilmente resolvida e a solução transportada de volta para o domínio do tempo. Esta abordagem pode ser aplicada para a resolução de PVI's de qualquer ordem, desde que sejam lineares e com coeficientes constantes. Além disso, a Transformada de Laplace é uma das melhores maneiras de avaliar problemas envolvendo *forçamentos descontínuos*, ou seja, quando o termo não-homogêneo é dado por uma função descontínua.

A ideia geral da resolução de PVI's com o uso da Transformada de Laplace é ilustrada no esquema a seguir.

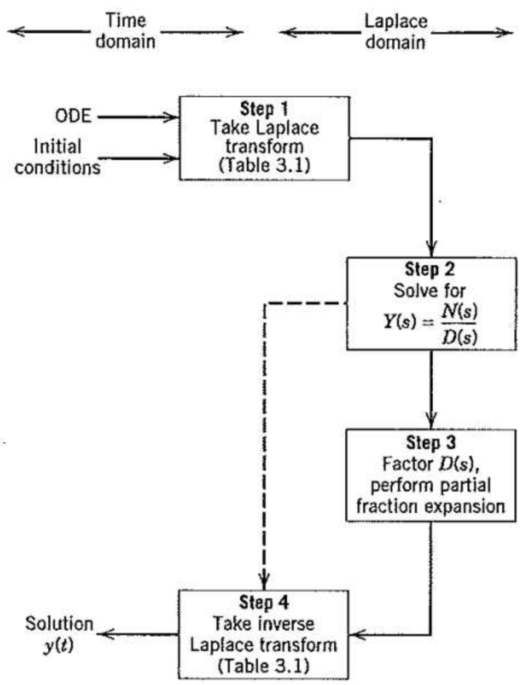


Figure 3.2 The general procedure for solving an ordinary differential equation using Laplace transforms.

A primeira etapa da resolução consiste em aplicada a transformada na equação diferencial, ou seja, deve-se avaliar a transformada do operador diferencial. De forma semelhante, pode-se também avaliar a transformada do operador integral. Por isso, a Transformada de Laplace também pode ser utilizada para a resolução de equações integro-diferenciais, que são equações diferenciais que envolvem também a integral das variáveis em algum intervalo. A seguir será apresentado como a transformada destes operadores é obtida.

10.1. Transformada de Derivadas e Integrais

Avaliando a transformada da derivada de uma função $f(t)$, temos que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

Resolvendo a integral por partes, podemos definir:

$$u = e^{-st} \qquad \rightarrow \qquad u' = -se^{-st} \qquad\qquad v = f(t) \qquad \rightarrow \qquad v' = f'(t)$$

De modo que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt &= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t)dt \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \end{aligned}$$

Observe que a integral é a própria definição de $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Considerando o critério para existência da transformada, temos que o limite do primeiro termo avaliado no infinito deve ser zero. Assim:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Para avaliar derivadas de maior ordem, pode-se aplicar a própria definição anterior:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

Como a transformada da derivada primeira de $f(t)$ foi obtida anteriormente:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Pode-se continuar aplicando este conceito para avaliar a derivada de qualquer ordem:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}\Big|_{t=0} - \ldots - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}$$

No caso de integrais, a transformada da integral de uma função $f(t)$ avaliada entre 0 e t, é dada por:

$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(t)dt\Big\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t)dt\right) e^{-st}dt$$

Avaliando a integral por partes, temos que:

$$u = \int_0^t f(t)dt \qquad \rightarrow \qquad u' = f(t)$$

e

$$v' = e^{-st} \qquad \rightarrow \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

De modo que a integral pode ser avaliada como:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(t)dt\right) e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\Big[\int_0^t f(t)dt(e^{-st})\Big]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Considerando que a função $f(t)$ satisfaz o critério para existência da transformada (taxa de crescimento menor que exponencial), o primeiro termo tende a zero conforme t tende ao infinito. A integral no segundo termo é a própria definição da transformada de $f(t)$. Assim:

$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(t)dt\Big\} = \frac{1}{s}F(s)$$

10.1.1. Resolução de Problemas de Valor Inicial

O emprego da transformada de Laplace em diferenciais retorna expressões algébricas, o que significa que equações diferenciais podem ser transformadas em equações algébricas.

Exemplo 01: Obtenha a solução do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$5\frac{dy}{dt} + 4y = 2 \qquad y(0) = 1 \qquad y(0) = 1$$

Considerando a linearidade da transformada de Laplace, pode-se avaliar cada um dos termos separadamente:

$$5\mathcal{L}\Big\{\frac{dy}{dt}\Big\} + 4\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{1\}$$

Definindo $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, temos que:

$$5(sY(s) - y(0)) + 4(Y(s)) = \frac{2}{s}$$

Considerando a condição inicial $y(0) = 1$, pode-se isolar a função $Y(s)$ como:

$$(5s+4)Y(s) = \frac{2}{s} + 5 \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{2+5s}{(s(5s+4))}$$

Par deixar todos os termos na forma $(s+a)$, pode-se dividir o numerador e o denominador por 5:

$$Y(s) = \frac{2/5 + s}{s(s + 4/5)}$$

Este termo pode ser expandido em frações parciais da forma:

$$\frac{2/5 + s}{s(s + 4/5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 4/5} = \frac{(s + 4/5)A + sB}{s(s + 4/5)}$$

de onde se obtém que $4/5A = 2/5$, o que implica que $A = 1/2$ e $A + B = 1$, de modo que $B = 1/2$. Assim:

$$\frac{2/5 + s}{s(s + 4/5)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s + 4/5)}$$

Como se deseja obter a função $y(t)$, aplica-se a transformada inversa em $Y(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 4/5)}\right\}$$

Com isso, temos que:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4t/5}$$

Exemplo 02: Obtenha a solução do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y'(0) = 0$$

Considerando a linearidade da transformada, pode-se avaliar cada termo separadamente:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

De modo que:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 0$$

Separando os termos:

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0$$

Isolando a função $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{y'(0) + (s - 1)y(0)}{s^2 - s - 2}$$

Considerando as condições iniciais conhecidas:

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}$$

Avaliando por frações parciais:

$$\frac{s-1}{s^2-s-2}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}=\frac{A(s+1)+B(s-2)}{(s+1)(s-2)}$$

de onde se obtém que $A=1/3$ e $B=2/3$. Assim:

$$Y(s)=\frac{s-1}{s^2-s-2}=\frac{1}{3(s-2)}+\frac{2}{3(s+1)}$$

Avaliando a inversa desta função, obtém-se a função $y(t)$ desejada:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}$$

Exemplo 03: Obtenha a solução particular do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-y=t \qquad y(0)=1 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=y'(0)=1$$

Avaliando a transformada de cada um dos termos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}-\mathcal{L}\left\{y\right\}=\mathcal{L}\{t\}$$

$$=(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))-Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

Isolando a função $Y(s)$:

$$(s^2-1)Y(s)=sy(0)+y'(0)+\frac{1}{s^2}$$

Considerando as condições iniciais, a expressão pode ser avaliada como:

$$Y(s)=\frac{s+1+1/s^2}{(s^2-1)}=\frac{s}{(s^2-1)}+\frac{1}{(s^2-1)}+\frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

Os dois primeiros termos podem ser facilmente identificados como a transformada das funções $\cosh(t)$ e $\sinh(t)$. O último termo pode ser avaliado através da expansão em frações parciais:

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s^2-1}=\frac{(s^2-1)A+Bs^2}{s^2(s^2-1)}$$

De onde se obtém que $A=1$ e $A-B=0$ de modo que $B=1$. Assim:

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2-1}$$

Assim, temos que:

$$Y(s)=\frac{s}{(s^2-1)}+\frac{1}{(s^2-1)}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(s^2-1)}=\frac{s}{(s^2-1)}+2\frac{1}{(s^2-1)}+\frac{1}{s^2}$$

Avaliando a transformada inversa de cada um dos termos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \cosh(t) + 2\sinh(t) + t = \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + t$$

Exemplo 04: Obtenha a solução particular do seguinte PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 2y = te^{-2t} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y'(0) = -2$$

Avaliando a transformada de cada um dos termos:

$$2\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\{te^{-2t}\}$$

$$= 2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Considerando que $y(0) = 0$ e que $y'(0) = -2$:

$$2s^2Y(s) + 4 + 3sY(s) - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Juntando os termos:

$$(2s^2 + 3s - 2)Y(s) + 4 = 2\left(s^2 + \frac{3}{2}s - 1\right)Y(s) + 4\frac{1}{(s+2)^2}$$

As raízes do polinômio de 2º grau são $s_1 = -2$ e $s_2 = 1/2$, de modo que $2(s^2 + 3s/2 - 2) = 2(s+2)(s-1/2)$

Isolando a função $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{2(s+2)(s-1/2)(s+2)^2} - \frac{4}{2(s+2)(s-1/2)} = \frac{1}{2(s-1/2)(s+2)^3} - \frac{4}{2(s+2)(s-1/2)}$$

Antes de aplicar a decomposição em frações parciais, pode-se juntar os dois termos:

$$Y(s) = \frac{1 - 4(s+2)^2}{2(s-1/2)(s+2)^3} = \frac{1 - 4(s^2 + 4s + 4)}{2(s-1/2)(s+2)^3} = \frac{-4s^2 - 16s - 15}{2(s-1/2)(s+2)^3}$$

Este termo pode então ser avaliado como frações parciais:

$$Y(s) = \frac{-4s^2 - 16s - 15}{(s-1/2)(s+2)^3} = \frac{A}{(2s-1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)^3}$$

Avaliando o MMC:

$$Y(s) = \frac{A(s+2)^3 + B(2s-1)(s+2)^2 + C(2s-1)(s+2) + D(2s-1)}{(2s-1)(s+2)^3}$$

Fazendo a expansão e juntando os termos de mesma ordem:

$$Y(s) = (A+2B)s^3 + (6A+7B+2C)s^2 + (12A+4B+3C+2D)s + (8A-4B-2C-D)$$

Igualando os termos de mesma ordem, obtém-se 4 equações:

$$A + 2B = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = -A/2$$

$$6A + 7B + 2C = -4 \qquad \rightarrow \qquad 6A - \frac{7}{2}A + 2C = -4 \qquad \rightarrow \qquad C = -\frac{5}{4}A - 2$$

$$12A + 4B + 3C + 2D = -16 \qquad \rightarrow \qquad 12A - 2A + 3\left(-\frac{5}{4}A - 2\right) + 2D = -16$$

$$10A - \frac{15A}{4} - 6 + 2D = -16 \qquad \rightarrow \qquad \frac{25A}{4} + 2D = -10 \qquad \rightarrow \qquad D = -\frac{25}{8}A - 5$$

$$8A - 4B - 2C - D = -15 \qquad \rightarrow \qquad 8A + 2A - 2\left(-\frac{5}{4}A - 2\right) + \frac{25A}{8} + 5 = -15$$

$$10A + \frac{5}{2}A + \frac{25}{8}A = -24 \qquad \rightarrow \qquad \frac{125A}{8} = -24 \qquad \rightarrow \qquad A = -\frac{192}{125}$$

Com isso, pode-se determinar as demais constantes:

$$B = \frac{96}{125} \qquad C = -\frac{2}{25} \qquad D = -\frac{1}{5}$$

Assim, temo que:

$$Y(s) = -\frac{192}{125(2(s-1/2))} + \frac{96}{125(s+2)} - \frac{2}{25(s+2)^2} - \frac{1}{5(s+2)^3}$$

O que também pode se escrito como:

$$Y(s) = \frac{1}{125}\left(-\frac{96}{(s-1/2)} + \frac{96}{(s+2)} - \frac{10}{(s+2)^2} - \frac{25}{(s+2)^3}\right)$$

Agora, a transformada inversa de cada termo pode ser determinada:

$$y(t) = \frac{1}{125}\left(-96e^{-t/2} + 96e^{2t} - 10te^{-2t} - \frac{25}{2}t^2e^{-2t}\right)$$

Exemplo 05: Obtenha a solução dos seguintes PVI utilizando a transformada de Laplace:

$$a)\ \frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} \qquad y(0) = 0$$

$$b)\ y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1$$

$$c)\ y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 3$$

$$d)\ y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$e) y'(t) + y/2 = 17\sin(2t) \qquad y(0) = -1$$

10.2. Convolução

Devido à linearidade da transformada de Laplace, sabe-se que $\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \{g(t)\}$. No caso da multiplicação de duas funções $f(t)$ e $g(t)$, no entanto, não ocorre a mesma relação. Assim:

$$\mathcal{L}\{(f(t)g(t))\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

O produto da transformada de duas funções é, na verdade, igual à transformada da convolução destas duas funções:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{(f * g)(t)\}$$

A convolução entre as funções $f(t)$ e $g(t)$ é definida como:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Teorema: Se duas funções $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$, então:

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

onde

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^\tau f(t-\tau)g(\tau)$$

Exemplo 06: Usando a propriedade da convolução, encontre a transformada inversa de:

$$H(s) = \frac{1}{(s-a)s}$$

Fazendo:

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)} \qquad\qquad G(s) = \frac{1}{s}$$

temos que $H(s) = F(s)G(s)$. As transformadas inversas de $F(s)$ e $G(s)$ são facilmente obtidas:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at} \qquad\qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 1$$

Definindo $f(\tau) = e^{a\tau}$ e $g(t-\tau) = 1$ e considerando a propriedade da convolução:

$$h(t) = (f * g)(t) = e^{at} * 1 = \int_0^t e^{a\tau} \cdot 1 d\tau = \frac{1}{a} e^{a\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

Assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

10.2.1. Propriedades da Convolução

A convolução mantém muitas das propriedades da multiplicação normal. Por exemplo:

- Comutatividade: $f * g = g * f$

- Distributividade: $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

- Associatividade: $(f * g) * h = f * (g * h)$

No entanto, algumas propriedades não são mantidas. Por exemplo, $f * 1 \neq f$:

$$f * 1 = \int_0^t f(t-\tau) \cdot 1 d\tau = \int_0^t f(t-\tau) d\tau$$

Por exemplo, fazendo $f(t) = \cos(t)$:

$$f * 1 = \cos(t) * 1 = \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau$$

A integral pode ser facilmente resolvida através de uma mudança de variável $t - \tau = u$:

$$\int_0^t \cos(t-\tau) d\tau = -\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = -\sin(0) + \sin(t) = \sin(t)$$

Exemplo 07: Encontre a transformada inversa de:

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$$

A função $H(s)$ pode ser escrita como:

$$H(s) = F(s)G(s) \qquad F(s) = \frac{1}{s^2} \qquad G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

onde as transformadas inversas de $F(s)$ e $G(s)$ são conhecidas:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = t \qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \sin(at)$$

Para avaliar $h(t)$, usa-se a propriedade da convolução:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t (t - \tau)\sin(a\tau)d\tau = \int_0^t t\sin(a\tau)d\tau - \int_0^t \tau\sin(a\tau)d\tau$$

Considerando que:

$$\int_0^t t\sin(a\tau)d\tau = -\frac{t}{a}\cos(a\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = -\frac{t}{a}(\cos(at) - 1)$$

A integral do segundo termo pode ser avaliada por partes, definindo:

$$u = \tau \qquad \rightarrow \qquad u' = \tau' = 1 \qquad v' = \sin(a\tau) \qquad \rightarrow \qquad v = -\frac{\cos(a\tau)}{a}$$

de modo que:

$$\int_0^t \tau\sin(a\tau)d\tau = -\frac{\tau\cos(a\tau)}{a}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \frac{\cos(a\tau)}{a}d\tau$$

$$= -\left(\frac{t\cos(at)}{a}\right) + \frac{\sin(a\tau)}{a^2}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \left(\frac{t\cos(at)}{a}\right) + \left(\frac{\sin(at)}{a^2}\right)$$

Juntando os termos:

$$h(t) = -\frac{t\cos(at)}{a} + \frac{t}{a} + \left(\frac{t\cos(at)}{a}\right) - \left(\frac{\sin(at)}{a^2}\right) = \frac{t}{a} - \left(\frac{\sin(at)}{a^2}\right)$$

Exemplo 08: Encontre a solução do PVI:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = g(t) \qquad y(0) = 3 \qquad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = -1$$

onde $g(t)$ é uma função qualquer.

Avaliando a transformada da equação diferencial, temos:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = G(S)$$

Empregando as condições iniciais e isolando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{3s - 1 + G(s)}{s^2 + 4} = 3\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2 + 4}G(s)$$

Avaliando a inversa de cada um dos termos:

$$y(t) = 3\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{2}{s^2+4}G(s)\Big\}$$

Para avaliar a inversa do último termo, pode-se empregar o conceito de convolução:

$$y(t) = 3\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2\tau)g(t-\tau)d\tau$$

10.3. Funções de Transferência [1]

As funções de transferência são funções utilizadas para representar qual a relação entre a saída e a entrada de um sistema, ou seja, como um sistema vai responder quando sofre alguma perturbação.

A representação da saída/entrada do sistema em uma (ou várias) equações diferenciais vai depender de cada caso, mas usualmente a saída é a própria variável dependente (solução da equação) e a entrada são os termos não-homogêneos da equação.

Considere a seguinte EDO linear de segunda ordem não-homogênea e as condições iniciais associadas:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = rt \qquad y(0) = K_0 \qquad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = y'(0) = K_1$$

onde a e b são constantes. Este tipo de equação surge em diversos sistemas físicos, onde $r(t)$ representa uma entrada (força motriz) aplicada ao sistema e a função $y(t)$ é a saída (resposta) obtida.

Por exemplo, para um circuito RLC:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

o termo $E(t)$ representa uma força aplicada ao sistema (entrada) e a solução $Q(t)$ representa como a carga elétrica (saída) vai responder a esta entrada.

Avaliando a transformada de Laplace da EDO, temos que:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + a(sY(s) - y(0)) + bY(s) = R(s)$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$(s^2 + as + b)Y(s) = (s+a)y(0) + y'(0) + R(s)$$

[1] Esta seção é opcional

O inverso do termo multiplicando $Y(s)$, definido como:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

é conhecido como *função de transferência*. Este termo não tem relação nem com as condições iniciais nem com a parte não-homogênea.

Com isso, a equação pode ser escrita como:

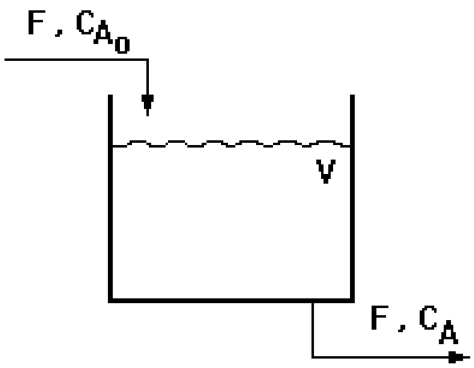
$$Y(s) = G(s)I(s) + G(s)R(s) \qquad\qquad I(s) = (s + a)y(0) + y'(0)$$

Em muitos casos, as condições inicias são $y(0) = y'(0) = 0$, de modo que $I(s) = 0$:

$$Y(s) = G(s)R(s) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

ou seja, a função $G(s)$ representa a relação entre a transformada da saída e da entrada, indicando como uma modificação na entrada é transferida para a saída.

Exemplo: Considere um reator de volume V onde é alimentada uma vazão F contendo uma concentração $C_{A,0} = C_{A,0}(t)$ de um reagente A que reage a uma taxa kC_A $(k < 0)$. Ao mesmo tempo, uma vazão F da mistura é removida. Na saída do reator, a concentração de A é $C_A = C_A(t)$.



A variação na concentração de A é dada por:

$$V\frac{dC_A}{dt} + F(C_A - C_{A,0}) + kC_A = 0$$

A equação pode ser reescrita como:

$$V\frac{dC_A}{dt} + (F + k)C_A = FC_{A,0}$$

Dividindo todos os termos por $F + k$:

$$\left(\frac{V}{F + k}\right)\frac{dC_A}{dt} + C_A = \frac{F}{F + k}C_{A,0}$$

Definindo:

$$\frac{V}{F+k} = \tau_0 \qquad\qquad \frac{F}{F+k} = K_p$$

A equação passa a ser dada por:

$$\tau_0 \frac{dC_A}{dt} + C_A = K_p C_{A,0}$$

Avaliando a T.L. da função:

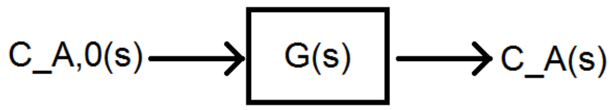
$$\tau_0(sC_A(s) - C_A(0)) + C_A(s) = K_P C_{A,0}(s)$$

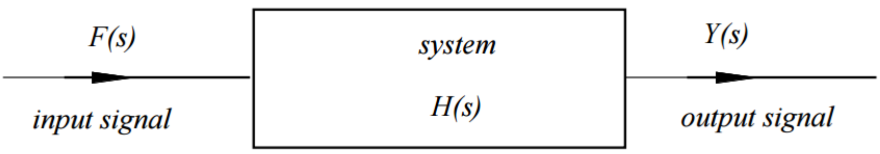
Considerando que inicialmente não havia reagente no reator, $C_A(0) = 0$ e a equação pode ser reescrita como:

$$G(s) = \frac{C_A(s)}{C_{A,0}(s)} = \frac{K_p}{\tau_0 s + 1}$$

Assim, a saída (concentração na saída) pode ser relacionada com a entrada (concentração na entrada) como:

$$C_A(s) = G(s) C_{A,0}(s)$$





Block diagram describing the system in the $s-$domain

10.3.1. Ganho da Função de Transferência

O ganho de uma F.T. é definido como a relação entre a saída e a entrada no estado estacionário (após um longo período de tempo). Assim, o ganho representa como os *pontos de equilíbrio* variam em função de uma perturbação na entrada. O ganho é calculado diretamente fazendo $s = 0$.

Exemplo: Determine o ganho para a função de transferência do exemplo anterior.

A função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{C_A(s)}{C_{A,0}(s)} = \frac{K_p}{\tau_0 s + 1}$$

Fazendo $s = 0$:

$$G(s) = K_p \qquad \rightarrow \qquad C_A(0) = K_p C_{A,0}(0)$$

Ou seja, no estado estacionário, a relação entre uma perturbação na entrada e a resposta na saída é K_p.

A solução da EDO que descreve a variação de $C_A(t)$ é:

$$C_A(t) = C_{A,0}(t) K_p (1 - e^{-t/\tau})$$

Assim, conforme $t \rightarrow \infty$, temos que:

$$C_A(t) = C_{A,0} K_P$$

Se, por exemplo, a concentração de A na entrada for duplicada, após um tempo suficientemente grande a concentração de A na saída irá aumentar em um fator $2K_P$.

10.3.2. Pólos e Zeros da FT

Uma FT $G(s)$ qualquer pode ser escrita como:

$$G(S) = \frac{a(s)}{b(s)}$$

As raízes de $a(s)$ (valores onde $G(s) = 0$) são chamados de zeros da FT, enquanto que as raízes de $b(s)$ (valores onde $G(s) \rightarrow \infty$) são chamados de pólos da FT.

Pode-se determinar o comportamento dinâmico de um sistema com base nos sinais das partes reais e imaginárias dos pólos e zeros da FT.

Os pólos e os zeros são propriedades da FT e como consequência das equações que descrevem um sistema. Em conjunto com o ganho, eles caracterizam completamente as equações diferenciais e fornecem um descrição completa do sistema.

Exemplo Determine os pólos e zeros da FT:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

Esta função pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau s + 1} = \frac{a(s)}{b(s)} \qquad \rightarrow \qquad a(s) = K_p \qquad b(s) = \tau s + 1$$

A função $a(s)$ não possui nenhuma raíz, portanto a FT não possui zeros. A função $b(s)$ é de primeira ordem com raíz $s = -1/\tau$, sendo este um pólo da FT.

Lista de Exercícios - Resolução de EDO's com Transformada de Laplace

1) Resolva os seguintes Problemas de Valor Inicial utilizando a transformada de Laplace:

a) $\dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t} \qquad y(0) = 5$

R: $y(t) = (t+5)e^{-t}$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - 3y = 6e^{t} \qquad y(0) = 1 \qquad \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 3$

R: $y(t) = -3/2e^{t} + 3/4e^{-t} + 7/4e^{3t}$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 3$

R: $y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

d) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 6\dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} + 6y = 1 \qquad \dfrac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0} = \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = y(0) = 0$

R: $y(t) = 1/6 - 1/2e^{-t} + 1/2e^{-2t} - 1/6e^{-3t}$

e) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \qquad y(0) = 2$

R: $y(t) = 2e^{-3t}$

f) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 1$

R: $y(t) = 2e^{2t} - 3te^{2t}$

g) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} \qquad y(0) = -5$

R: $y(t) = e^{3t} - 6e^{2t}$

h) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0 \qquad y(0) = -1 \qquad \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 7$

R: $y(t) = e^{t}(4\sin(2t) - \cos(2t))$

i) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \qquad y(0) = 0 \qquad \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0$

R: $y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}$

2) Use o conceito de convolução para obter a transformada inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$

b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-2)}$

c) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+16)^2}$

d) $F(s) = \dfrac{5}{(s^2+1)(s^2+25)}$

3) ***Resolução de sistemas de EDO's:*** Da mesma forma que a aplicação da Transformada de Laplace em uma EDO linear com coeficientes constantes transforma a equação em uma relação algébrica, pode-se aplicar a transformada em um sistema de EDO's para se obter um sistema algébrico, que pode então ser resolvido. Considere o seguinte sistema de PVI's:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y \qquad x(0) = 8$$
$$\frac{dy}{dt} = y - 2x \qquad y(0) = 3$$

a) Aplique a Transformada de Laplace neste sistema e resolva o sistema algébrico resultante para obter expressões para $X(s)$ e $Y(s)$;

b) Obtenha a solução do sistema de equações diferenciais;

R: $x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$ $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$

11. EDO's com Forçamentos Descontínuos

11.1. Função Degrau e Deslocamento no Tempo

Uma das principais vantagens da utilização da transformada de Laplace na modelagem de processos é a facilidade em operar com funções descontínuas. Como a transformada é definida em termos de uma integral, é possível expressar a transformada de Laplace de uma função $g(t)$ que contém uma descontinuidade em $t = a$ como:

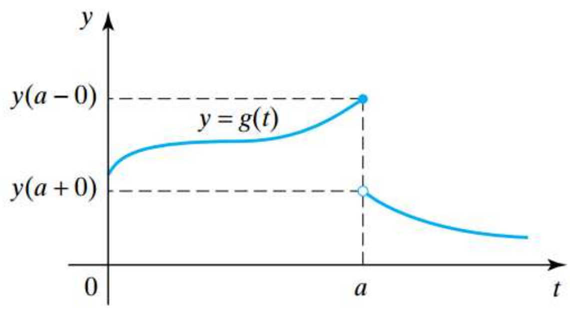


FIGURE 7.1 A discontinuous function $g(t)$.

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{a-\epsilon} e^{-st} g(t)dt + \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{\infty} e^{-st} g(t)dt$$

Dentre as funções descontínuas mais importantes nas engenharias, pode-se destacar a função degrau ou função de Heaviside. Esta função é definida como:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

Esta função funciona como um "interruptor" (liga/desliga). Pode-se usar funções degrau também para descrever funções que possuem valores 0 ou 1 em intervalos finitos, conforme apresentado no gráfico a seguir:

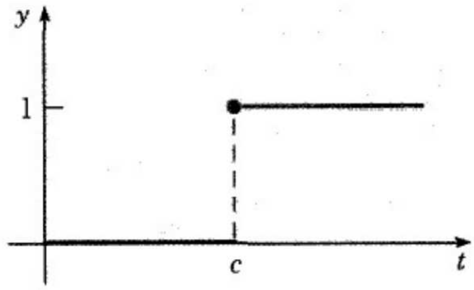


FIG. 6.3.1 Gráfico de $y = u_c(t)$.

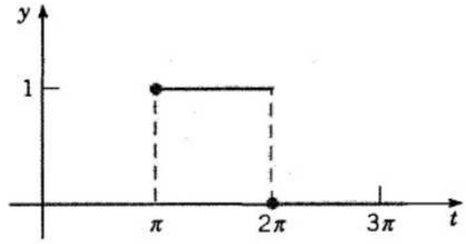


FIG. 6.3.3 Gráfico de $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

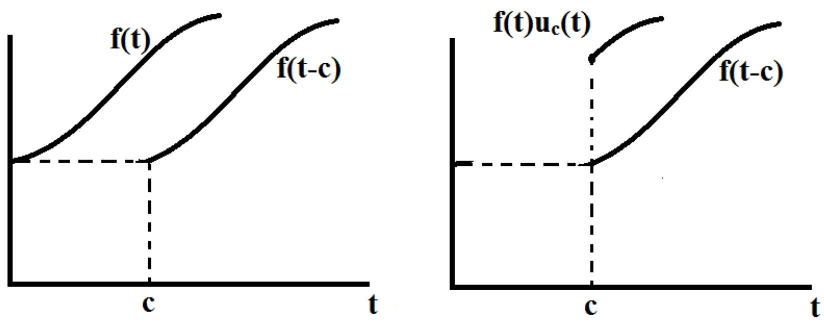
Esta função pode ser modelada como:

$$y(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$$

Pode-se empregar este tipo de função para "ativar" uma determinada função $f(t)$ somente dentro de um intervalo específico.

11.1.1. Deslocamento no Tempo

Em muitos processos físicos, a função que descreve as variáveis pode ser deslocada no tempo, conforme apresentado no gráfico a seguir. Neste caso, não ocorre uma ativação/desativação da função, mas sim um deslocamento de toda a função. Considerando que a função $f(t)$ definida em um intervalo $[0, \infty)$ seja deslocada por um valor c, a função deslocada corresponde a $f(t - c)$.



Como a funcão $f(t)$ era definida a partir de zero, a função $f(t-c)$ vai ser definida a partir de $t = c$. No entanto, em muitas aplicações que envolvem integral, como por exemplo para determinar a Transformada de Laplace, deve-se conhecer a função a partir de $t = 0$. Para contornar este problema, pode-se supor que a função $f(t-c)$ seja igual a zero no intervalo de $t = 0$ até $t = c$, de modo que a área embaixo da curva (integral) seja nula.

Assim, considerando que a função $f(t-c)$ deve igual a zero para $t < c$, pode-se usar a função degrau ativar a função somente em $t = c$. Pode-se representar a curva deslocada $\widetilde{f}(t)$ válida no intervalo $[0, \infty)$ como:

$$\widetilde{f}(t) = u_c(t)f(t-c)$$

Avaliando a transformada de Laplace desta função, temos que:

$$\mathcal{L}\{\widetilde{f}(t)\} = \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$

Para valores de $t < c$, a função vale zero, de modo que a integral (área abaixo da curva) pode ser avaliada a partir de $t = c$:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_c^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$

Neste caso, a função $u_c(t)$ será igual a 1 em todo o intervalo de integração. Para resolver a integral, pode-se realizar a seguinte mudança de variáveis:

$$x = t - c \qquad \rightarrow \qquad dx = dt$$

Quando $t = c$, $x = 0$, de modo que a integral pode ser avaliada como:

$$\int_{t=c}^{t=\infty} e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-s(x+c)}f(x)dx$$

ou ainda:

$$= \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-sx}e^{-sc}f(x)dx = e^{-sc}\int_{x=0}^{x=\infty} e^{-sx}f(x)dx$$

A integral corresponde exatamente à definição da transformada da função não-deslocada $f(t)$, de modo que:

$$\mathcal{L}\{\widetilde{f}(t)\} = e^{-sc}F(s)$$

Considerando a mudança de variável empregada:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-sc}F(s)$$

Este procedimento é conhecido como deslocamento no tempo.

Resumo:

- Deslocamento na frequência:

$$\mathcal{L}\{e^{bt}f(t)\} = F(s-b)$$

- Deslocamento no tempo:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-sc}F(s)$$

Exemplo 01: Obtenha a transformada de Laplace da seguinte função:

$$f(t) = u_\pi(t)\sin(t-\pi)$$

Considerando o princípio de deslocamento no tempo, a transformada desta função será igual a:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(t)\} = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Exemplo 02: Encontre a transformada inversa da seguinte função:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-3s}}{(s+2)^2}$$

Considerando a linearidade da transformada, cada um dos termos pode ser avaliado separadamente. Com a exceção da parte exponencial, o primeiro e o segundo termo correspondem à transformada da função $(1/\pi)\sin(\pi t)$. Usando o princípio do deslocamento no tempo, o primeiro termo é avaliado como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right\} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_1(t)$$

Da mesma forma, o segundo termo é avaliado com:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right\} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_2(t)$$

Desconsiderando a parte exponencial, o terceiro termo pode ser avaliado como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

Este termo pode ser avaliado como a transformada de $f(t) = t$ com um deslocamento na frequência de -2. Então, temos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = te^{-2t}$$

Considerando agora o princípio do deslocamento no tempo, o terceiro termo completo resulta em:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-st}}{(s+2)^2}\right\} = u_3(t)(t-3)e^{-2(t-3)}$$

Assim, a transformada inversa da função $F(s)$ será:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_1(t) + \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u_2(t) + u_3(t)(t-3)e^{-2(t-3)}$$

Exemplo 03: Encontre a transformada inversa da seguinte função:

$$G(s) = \frac{s - e^{-2s}}{s^2 + 2s + 5}$$

11.2. Função Delta de Dirac

Outro exemplo de função descontínua muito utilizada na modelagem de fenômenos físicos é a função delta de Dirac, também chamada de função impulso. Esta função é empregada para descrever forças de módulo grande que agem por pequenos intervalos de tempo.

Considere uma equação da forma:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t)$$

onde $g(t)$ representa uma força aplicada em um intervalo $c - \tau < t < c + \tau$ e é zero para os demais valores de t.

A integral $I(t)$, definida como:

$$I(t) = \int_{c-\tau}^{c+\tau} g(t)dt$$

representa o impulso causado pela força dentro do intervalo $(c-\tau, c+\tau)$. Como a função é nula fora deste intervalo, a integral pode também ser avaliada como:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$$

Em particular, considere $g(t)$ definida como:

$$g(t) = d_\tau(t-c) = \begin{cases} 1/2\tau & c - \tau < t < c + \tau \\ 0 & t \leq c - \tau \text{ ou } t \geq c + \tau \end{cases}$$

A integral resulta em:

$$I(t) = \int_{c-\tau}^{c+\tau} (1/2\tau)dt = \frac{1}{2\tau}(c + \tau - (c - \tau)) = 1$$

Avaliando o limite $\tau \to 0$

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

A função delta de Dirac ($\delta(t)$) é obtida avaliando a integral no limite $\tau \to 0$, sendo que, por definição, neste caso $I(t) = 1$. Dessa forma, $\delta(t)$ é definida como:

$$\delta(t - c) = 0 \qquad t \neq c$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - c)dt = 1$$

Nenhuma função comum satisfaz estas condições, sendo por isso definida a função delta de Dirac. Fisicamente, esta função representa um impulso aplicado em $t = c$.

Para avaliar a transformada de Laplace da função $\delta(t - c)$, podemos considerar que:

$$\delta(t - c) = \lim_{\tau\to 0} d_\tau(t - c)$$

De modo que:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - c)\} = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t - c)\}$$

Como $d_\tau(t - c)$ é diferente de zero apenas no intervalo $c - \tau$ até $c + \tau$, temos que:

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - c)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} d_\tau(t - c)dt = \int_{c-\tau}^{c+\tau} e^{-st} d_\tau(t - c)dt$$

Substituindo a definição de $d_\tau(t - c)$:

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - c)\} = \frac{1}{2\tau}\int_{c-\tau}^{c+\tau} e^{-st}dt = -\frac{1}{2s\tau}e^{-st}\Big|_{t=c-\tau}^{t=c+\tau} = \frac{1}{2s\tau}e^{-sc}(e^{s\tau} - e^{-s\tau})$$

O resultado acima pode também ser expresso como:

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - c)\} = \frac{\sinh(s\tau)}{s\tau}e^{-sc}$$

De modo que:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - c)\} = \lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{\sinh s\tau}{s\tau}e^{-sc}\right\}$$

O limite gera uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando L'Hôpital:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - c)\} = \lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{s\cosh s\tau}{s}e^{-sc}\right\} = e^{-sc}$$

Esta equação define a transformada para $\delta(t-c)$ para qualquer valor de $t_0 > 0$. Avaliando o limite quando $t \to c$, temos:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{c \to 0} e^{-sc} = 1$$

Em muitos casos, a função Delta de Dirac aparece multiplicada por outra função que define a natureza do impulso. Como $\delta(t-c)$ é diferente de zero somente em algum valor de $t = c$, o produto $f(t)\delta(t-c)$ representa um impulso de intensidade $f(c)$ em $t = c$.

A transformada do produto $f(t)\delta(t-c)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\delta(t-c)dt$$

Como este termo só é diferente de zero em $t = c$, temos que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-sc} f(c)\delta(t-c)dt$$

Como $e^{-sc}f(c)$ representa um valor constante no domínio do tempo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = e^{-sc} f(c) \int_0^\infty \delta(t-c)dt$$

Como a integral de $\delta(t-c)dt$ é definida como 1:

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-c)\} = e^{-sc} f(c)$$

11.3. EDO's com Forçamentos Descontínuos

Em muitos casos, o termo não-homogêneo das equações diferenciais $(r(t))$ é dado por uma função descontínua, sendo neste caso a transformada de Laplace um dos métodos mais adequados para a análise do problema.

Exemplo 04: Resolva o seguinte PVI:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} 1 & 5 \geq t < 20 \\ 0 & \begin{cases} 0 \geq t < 5 \\ t \geq 20 \end{cases} \end{cases} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

A parte não-homogênea representa uma função degrau unitário entre 5 e 20 e nula para os demais valores. Em termos da função degrau, esta função pode ser expressa como:

$$r(t) = u_5(t) - u_{20}(t)$$

Conforme visto anteriormente, a transformada desta função pode ser dada como (considerando $f(t) = 1$):

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}$$

Avaliando também a transformada da parte homogênea:

$$2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}$$

Usando as condições iniciais e agrupando os termos semelhantes, temos que:

$$Y(s)(2s^2 + s + 2) = \frac{e^{-5s} + e^{-20s}}{s}$$

De modo que:

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} + e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)} = H(s)e^{-5s} + H(s)e^{-20s} \qquad H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}$$

Considerando que $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$ e utilizando o princípio de deslocamento no tempo, temos que:

$$y(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20)$$

Para determinar o formato da função $f(t)$, temos que avaliar a inversa de $H(s)$. Para isso, pode-se expandir a função em frações parciais:

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{2s^2 + s + 2} = \frac{(2s^2 + s + 2)A + (Bs + C)s}{s(2s^2 + s + 2)}$$

de onde se obtém que $A = 1/2$, $C = -1/2$ e $B = -1$. Assim:

$$H(s) = \frac{1}{2s} - \frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2}$$

O primeiro termo pode ser facilmente avaliado. Para analisar o segundo termo, pode-se dividir os termos por 2 e completar o quadrado no denominador:

$$\frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2} = \frac{1/2(s + 1/2)}{s^2 + s/2 + 1} = \frac{1/2(s + 1/2)}{(s + 1/4)^2 + 1 - 1/16}$$

ou ainda:

$$= \frac{1}{2}\frac{(s + 1/4) + 1/4}{(s + 1/4)^2 + 15/16} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s + 1/4)}{(s + 1/4)^2 + 15/16} + \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15/16}}{(s + 1/4)^2 + 15/16}\right)$$

O primeiro termo pode ser visto como a transformada da função cosseno e o segundo termo da função sendo deslocadas por 1/4 na frequência. Assim:

$$H(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\left(\frac{(s + 1/4)}{(s + 1/4)^2 + 15/16} + \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15/16}}{(s + 1/4)^2 + 15/16}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{15}}e^{-t/4}\sin\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right)\right)$$

Exemplo 05: Encontre a solução do Problema de Valor Inicial:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-4) \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação:

$$2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-4s}$$

Usando as condições iniciais e agrupando os termos:

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = e^{-4s} \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{e^{-4s}}{2s^2 + s + 2}$$

Dividindo o numerador e o denominador por 2:

$$Y(s) = \frac{e^{-4s}}{2}\frac{1}{s^2 + s/2 + 1}$$

Completando o quadrado no denominador, temos:

$$Y(s) = \frac{e^{-4s}}{2}\frac{1}{(s+1/4)^2 + 15/16} = \frac{e^{-4s}}{2}\frac{4}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15}/4}{((s+1/4)^2 + 15/16)}$$

Considerando que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{15}/4}{(s+1/4)^2 + 15/16}\right\} = h(t) = \sin(\sqrt{15}t/4)e^{-t/4}$$

A função exponencial no domínio de Laplace, resulta em um deslocamento no tempo. Assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}u_4(t)h(t-4)$$

ou ainda:

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}u_4(t)e^{-(t-4)/4}\sin(\sqrt{15}(t-4)/4)$$

Considerando as propriedades da função degrau, este resultado pode ser expresso como:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}}e^{-(t-4)/4}\sin\left(\dfrac{\sqrt{15}(t-4)}{4}\right) & t \geq 4 \end{cases}$$

Exemplo 06) Obtenha a solução dos seguintes PVI's

a) $\dfrac{dy}{dt} + y = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \qquad y(0) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dt} + y = \delta(t-1) + t \qquad y(0) = 1$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = u_{3\pi}(t) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

Lista de Exercícios - EDO's com Forçamentos Descontínuos

1) Obtenha a solução dos seguintes PVI's com forçamento descontínuo:

a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

R: $y(t) = (1 - 2t + t^2)u_1(t)/2$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi/2 \\ 0 & t \geq \pi/2 \end{cases} \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$

R: $y(t) = 1 - \cos(t) + \sin(t) - u_{\pi/2}(1 - \cos(t - \pi/2))$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} + 5\delta(t-2) \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$

R: $y(t) = e^{-t}\sin(t) + e^{-t}(1 - \cos(t)) + 5u_2(t)e^{-(t-2)}\sin(t-2)$

d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = -2\sin(t) + 10\delta(t - \pi) \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$

R: $y(t) = t\cos(t) - 10\sin(t)u_\pi(t)$

e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = \delta(t - \pi/2) + u_\pi \cos(t) \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$

R: $y(t) = u_{\pi/2}(e^{-2t+\pi} - e^{-3t+3\pi/2}) - (u_\pi(t)/10)(-4e^{-2t+2\pi} + 3e^{-3t+3\pi} - \cos(t) - \sin(t))$

2) Considerando os princípios de deslocamento no tempo e na frequência, obtenha a transformada inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s^2}$

R: $f(t) = u_4(t)(t-4)$

b) $F(s) = \dfrac{se^{-s}}{s^2 + a^2}$

R: $f(t) = u_1(t)\cos(a(t-1))$

c) $F(s) = s^{-2} - (s^{-2} + s^{-1})e^{-s}$

R: $f(t) = t - tu_1(t)$

d) $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$

R: $f(t) = e^{-(t-\pi)\sin(t-\pi)u_\pi(t)}$

e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 4}$

R: $f(t) = te^{-2t}$

f) $F(s) = \dfrac{1 - e^{-2s}}{s^2}$

R: $f(t) = t - (t-2)u_2(t)$

12. Introdução às Séries de Potência

Como visto anteriormente, as EDO's de segunda ordem lineares com coeficientes constantes podem ser resolvidas analiticamente e a solução pode ser expressa em termos de funções elementares, como exponencial, seno e cosseno. Para EDO's com coeficientes variáveis, normalmente a solução envolve funções mais complexas, como as funções de Bessel, polinômios de Legendre e funções hipergeométricas.

Existem diferentes métodos para a obtenção destas soluções, sendo o mais simples o método de solução por séries de potência, sendo que neste caso a solução será na forma de uma série do tipo $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$. Este tipo de função é chamado de ***série de potência*** pois representa um polinômio de ordem n. O método de solução por série de potência é bastante versátil e pode ser utilizado para obter a solução de praticamente qualquer EDO linear, de qualquer ordem. Por isso, este método é muito empregado por softwares para a resolução de EDO's.

A seguir será apresentada uma breve introdução referente às operações básicas com séries infinitas.

12.1. Séries de Potência

Uma série de potências centrada em x_0 é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

Caso o resultado deste somatório convergir para um valor finito para um dado valor de x, a série é dita *convergente* neste ponto x. Caso o resultado do somatório for $\pm\infty$, a série é dita *divergente* neste ponto.

De modo geral, uma série converge se o seguinte limite:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(x - x_0)^n$$

existir. A série sempre irá convergir em $x = x_0$. Porém, para os demais valores de x, a série pode convergir para qualquer x ou pode convergir somente para determinados valores de x. Neste caso, a convergência está limitada a um intervalo definido.

Normalmente, a série é centrada no ponto $x_0 = 0$, de modo que pode ser expressa como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Uma das principais vantagens da utilização de séries de potência é que elas são facilmente manipuláveis. Algumas propriedades úteis das séries de potência são as seguintes:

(a) ***Soma e subtração termo a termo***: Duas séries de potência em torno do mesmo ponto x_0 podem ser adicionadas ou subtraídas termo a termo. Se as duas séries forem convergentes, então a soma ou subtração delas também será convergente.

(b) ***Diferenciação e integração termo a termo***: Como os operadores diferencial e integral são *operadores lineares*, pode-se remover as constantes dos operadores e separar diferentes termos. Por exemplo, considere a função $f(x)$ definida em termos de uma série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \rightarrow \qquad \frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{dx^n}{dx}$$

Isto implica que uma série pode ser integrada ou derivada termo a termo.

(c) ***Igualdade entre duas séries***: Para que duas séries de potência sejam consideradas iguais, elas devem ser centradas em torno do mesmo ponto x_0 e cada um dos coeficientes de ordem n devem ser equivalentes. Por exemplo, considere que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Esta igualdade só é verdadeira se para cada valor de n, a relação $a_n = b_n$ seja válida. Em particular, fazendo $b_n = 0$ temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0$$

Esta relação só é satisfeita se $a_n = 0$ para todos os valores de n.

(d) ***Deslocamento do índice do somatório***: O índice n utilizado no somatório é uma variável auxiliar que não possui um significado físico. Por isso, pode-se fazer mudanças nesta variável conforme for conveniente. Por exemplo, considere a série:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Definido um índice $k = n - 2$, de modo que $n = k + 2$, a série pode ser definida como:

$$f(x) = \sum_{k+2=0}^{\infty} a_{k+2}x^{k+2} = \sum_{k=-2}^{\infty} a_{k+2}x^{k+2}$$

Para averiguar se de fato não houve nenhuma alteração na série, pode-se avaliar os termos de cada uma das séries. Por exemplo, para a primeira forma (em termos de n):

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots$$

Para a segunda série (em termos de k), começando a avaliar a parir de $k = -2$:

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots$$

Portanto, as duas formas são equivalentes.

Exemplo 01: Escreva a série

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

como uma série cujo termo geral envolve $(x - x_0)^n$.

Resolução: Como a série envolve um expoente $n - 2$ e este deve ser n, deve-se deslocar o valor de n em mais duas unidades. Lembrando que o índice n pode ser deslocado com for conveniente, desde que este deslocamento seja feito em toda a expressão, incluindo o índice dos coeficientes a_n.

Para deslocar o índice, deve-se somar 2 em todos os termos n:

$$\sum_{n+2=2}^{\infty}((n+2)+2)((n+2)+1)a_{n+2}(x-x_0)^{(n+2)-2}$$

Ou ainda, simplificando:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^{n}$$

De modo que se obtém uma série em termos de $(x - x_0)^n$.

Em muitos casos, é conveniente avaliar alguns termos das duas séries para verificar se o deslocamento foi feito de forma correta, sem alterar a definição original. Avaliando quatro termos de cada série, temos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2} = (4)(3)a_2(x-x_0)^0 + (5)(4)a_3(x-x_0)^1 +$$
$$(6)(5)a_4(x-x_0)^2 + (7)(6)a_5(x-x_0)^3 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^{n} = (4)(3)a_2(x-x_0)^0 + (5)(4)a_3(x-x_0)^1 +$$
$$(6)(5)a_4(x-x_0)^2 + (7)(6)a_5(x-x_0)^3 + \dots$$

Assim, observa-se que as duas séries são idênticas.

Exemplo 02: Escreva a seguinte expressão em termos de uma série cujo termo geral envolve x^n:

$$f(x) = x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Resolução: Para poder juntar as duas séries em uma só, deve-se primeiramente alinhar os expoentes das duas séries, ou seja, deve-se deslocar o da primeira série para n ou o da segunda para $n-2$. Como está sendo pedido para escrever em termos de uma série envolvendo x^n, deve-se ajustar o expoente de primeira.

Primeiramente, pode-se fazer a multiplicação do termo x. Como este fator multiplica todos os termos da série, pode-se simplesmente ajustar o expoente:

$$x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2+1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}$$

Agora, pode-se deslocar o índice para deixar a série em termos de x^n, deslocando o índice em mais uma unidade:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n+1=2}^{\infty} (n+1)((n+1)-1)a_{n+1} x^{(n+1)-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$$

Assim, a função $f(x)$ pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A segunda etapa para juntar as duas séries em uma só é ajustar o valor de n onde a série inicia. Neste caso existem duas opções, deslocar a primeira para zero ou a segunda para um.

1^a *opção - Aumentando o valor inicial do índice:* Quando o valor incial do índice é aumentado, isto significa que a série irá iniciar em um termo posterior. Para não alterar a igualdade, os termos negligenciados devem ser adicionados fora do somatório. Por exemplo, quando o índice é deslocad de 0 para 1, o termo de ordem 0 é retirado do somatório e deve portanto ser adicionado para não alterar a igualdade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + a_0 x^0 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

2^a *opção - Diminuindo o valor inicial do índice:* De forma semelhante, quando o índice é diminuido, está se acrescentando termos na série que não existiam originalmente. Para não alterar a igualdade, estes termos devem ser subtraídos do somatório:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n - (0+1)0 a_{n+1} x^0$$

Neste caso o termo subtraído é igual a zero, porém isto nem sempre será verdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n$$

Agora, pode-se juntar as duas séries utilizando qualquer uma das opções:

1^a *opção:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)n a_{n+1} + a_n) x^n$$

2^a *opção:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)n a_{n+1} + a_n) x^n$$

Vale lembrar que as três formas de representar $f(x)$ são equivalentes e caso os termos dos somatórios forem expandidos, os valores obtidos serão os mesmos.

Exemplo 03: Determine uma relação para os coeficientes a_n que satisfazem a igualdade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Resolução: Neste caso temos uma igualdade entre duas séries. Para que esta igualdade seja válidade, os coeficientes associados com cada ordem devem ser iguais.

Para poder estabelecer a igualdade dos coeficientes, as duas séries devem estar em termos do mesmo expoente e iniciar no mesmo valor de n. É indiferente quais das séries serão alteradas, desde que todas estejam de acordo no final.

Primeiramente, será ajustado o expoente da série do lado direito (por conveniência) para x^n, deslocando o índice em mais uma unidade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{(n+1)=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{(n+1)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Neste caso, o valor inicial de n já está de acordo com o da outra série, portanto não será necessário fazer nenhuma alteração neste termo. Assim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Como todos os coeficientes devem ser iguais, temos que:

$$a_n = (n+1) a_{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou ainda:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Não é possível definir os valores dos coeficientes, porém, supondo que o valor de algum deles seja conhecido, pode-se determinar os demais. Por exemplo, suponha que o valor de a_0 seja conhecido, os demais termos serão:

$$n = 0 \qquad \rightarrow \qquad a_1 = a_0$$

$$n = 1 \qquad \rightarrow \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$n = 2 \qquad \rightarrow \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{6} = \frac{a_0}{3!}$$

$$n = 3 \qquad \rightarrow \qquad a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4 \times 3!} = \frac{a_0}{4!}$$

Assim, observa-se a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \qquad n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Obs.: Nem sempre é possível obter uma relação geral para todos os coeficientes como neste caso.

12.2. Expansão em Série de Taylor

A expansão em séries de Taylor é uma forma de representar uma função $f(x)$ qualquer na forma de uma série de potências. A expansão é feita através da representação da função em um ponto x qualquer com base no valor da função em outro ponto x_0 e das derivadas de ordem n da função no ponto x_0.

A expansão em série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de um ponto x_0 é dada como:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Se todos os termos da série forem considerados, esta expansão não representa uma aproximação, mas sim o valor exato da função. Na maioria dos casos, a expansão é feita nas vizinhanças do ponto x_0, de modo que $(x-x_0)$ é relativamente pequeno. Por isso, os termos de alta ordem (derivadas com ordem maior que 2) costumam ser muito pequenos, de modo que a expansão pode ser truncada após alguns termos.

Por exemplo, considere que se deseja avaliar e^x em $x = 1$ com base no valor em $x = 0$ ($e^0 = 1$). Substituindo na expansão:

$$e^1 = e^0 + e^0(1-0) + \frac{e^0}{2}(1-0)^2 + \frac{e^0}{6}(1-0)^3 + \frac{e^0}{24}(1-0)^4 + \ldots = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

Considerando 5 termos, o valor encontrado é de $e = 2.70833$, sendo que o valor exato é de $e = 2.71828$, apresentando assim um erro de 0.366%.

De forma geral, a função e^x pode ser expressa com base em e^0 da forma:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Neste caso pode-se obsevar um padrão nos termos da série, que podem ser generalizados como:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

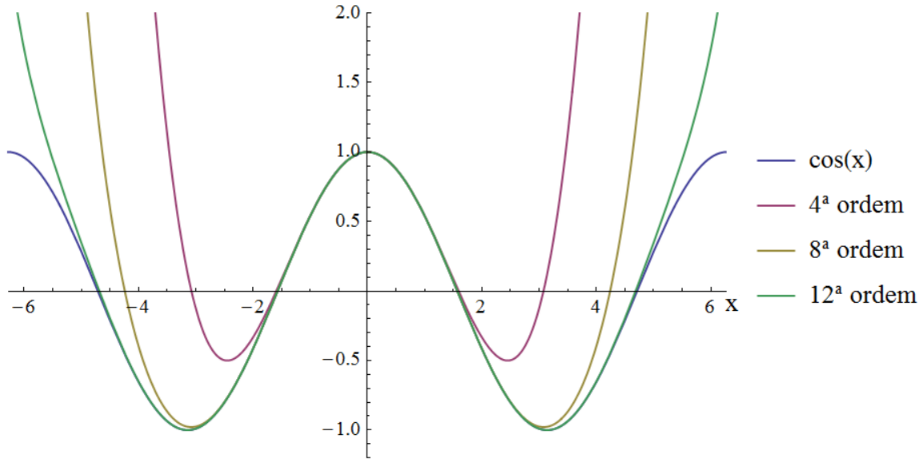
Esta expressão é, de fato, uma forma de ***definir*** a função exponencial.[1]

De forma semelhante, pode-se definir outras funções elementares com base em séries de potência. Por exemplo, considere a função $\cos(x)$ expandida em torno de $x_0 = 0$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Na figura a seguir é apresentada as curvas da função cosseno original juntamente com a expansão considerando 4, 8 e 12 termos. Como pode ser observado, quanto mais termos forem considerados na expansão, maior será o intervalo onde a expansão é válida.

[1] Na maioria dos casos não é possível generalizar os coeficientes como neste caso, porém a expansão continua válida.



Para poder expressar uma função em termos de uma expansão em séries de Taylor, são necessárias três condições:

(i) Em primeiro lugar, deve ser possível avaliar todos os termos da série, portanto a função $f(x)$ deve ser infinitamente diferenciável em x_0;

(ii) O resultado da série deve convergir em algum intervalo $|x - x_0| < R$, para $R > 0$;

(iii) A série deve convergir para o valor exato de $f(x)$, ou seja, deve representar a função.

Se for possível representar a função no intervalo $|x - x_0| < R$ através da série de Taylor, então a função é dita ***analítica*** em x_0 e x_0 é dito um ponto ordinário. Se a função não for analítica em x_0, este ponto é chamado de singular.

Considerando a natureza da expansão em série de Taylor, caso a condição (i) seja satisfeita, é muito provável que as condições (ii) e (iii) também sejam, com raras exceções. Portanto, de modo geral, é suficiente verificar se a função é infinitamente diferenciável em x_0 para definir se ela pode ser expressa como uma série de Taylor.

12.3. Raio de Convergência de Séries de Potência

Uma dada série de potência da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge em um ponto x se o limite:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n$$

existe para este dado valor de x. O ponto $x = x_0$ sempre será convergente.

Teorema 01: Considere que uma dada série de potências converge em um valor $x = x_1$. Isto implica que ela também irá convergir para qualquer valor x que satisfaça a condição

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|$$

De forma semelhante, se ela diverge em $x = x_2$, irá divergir para valores de x onde

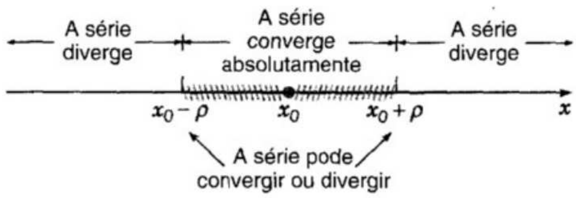
$$|x - x_0| > |x_2 - x_0|$$

Com base nisto, pode-se definir um limite até onde a série irá convergir em torno do ponto x_0. Este limite é chamado de **raio de convergência** (ρ) e é definido da seguinte forma:

Raio de Convergência: Existe um número não-negativo ρ tal que a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge para $|x - x_0| < \rho$ e diverge para $|x - x_0| > \rho$. ρ pode variar desde zero quando a série converge unicamente em x_0 até infinito quando a série converge para qualquer valor de x.



Para determinar se a série converge em um determinado valor de x, pode-se aplicar o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x - x_0| L$$

Se $|x - x_0| L < 1$ então a série converge em x e se $|x - x_0| L > 1$ então a série diverge (se for igual a 1, o teste é inconclusivo).

Para valores onde L é definido, o raio de convergência pode ser obtido como:

$$\rho = \frac{1}{L}$$

Se $L = 0$, então a série converge para todo x e se $L = \infty$ a série converge somente em x_0.

Exemplo 04: Determine o raio de convergência das seguintes séries:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

Neste caso, $a_n = n!$ e $x_0 = 0$. Assim:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Portanto, a série converge somente em $x = x_0$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

Neste caso, $x_0 = -1$ e $a_n = 1/(n2^n)$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\rho = 1/L = 2$. Assim, a série irá convergir para $|x - x_0|(1/2) < 1$, ou seja, $|x+1| < 2$ (x deve estar no intervalo $(-3, 1)$).

Lista de Exercícios - Introdução às Séries de Potência

1) Escreva as expressões a seguir como uma série cujo termo geral envolve x^n.

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

R: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

b)

$$x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

R: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n$

c)

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

R: $\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n)x^n$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

R: $a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1} + a_{n-1})x^n$

2) Determine o raio de convergência das seguintes séries de potência:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$$

R: $\rho = 2$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

R: $\rho = 1/2$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

R: $\rho = \infty$

d)*[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$$

R: $\rho = e$

3) Determine a expansão em série de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos x_0 dados.

a) $y(x) = \sin(x), \qquad x_0 = 0$

R: $y(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$

[2]Dica: Para resolver o limite, aplique o operador ln nos dois lados da expressão e após utilize a regra de L'Hopital

b) $y(x) = e^x, \qquad x_0 = -1$

R: $y(x) = 1/e + (x+1)/e + (x+1)^2/2e + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n/(n!e)$

c) $y(x) = \ln(x), \qquad x_0 = 1$

R: $y(x) = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} -(-1)^n(x-1)^n/n$

4) Dado que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

encontre uma expressão geral para y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries.

R: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n^2(n+1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2(n+1)x^n$

5) Dado que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

encontre uma expressão geral para y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries. Considerando que $y'' = y$ e a_0 e a_1 são dois coeficientes arbitrários, determine expressões para a_2 e a_3. Mostre que, de forma geral:

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

R: $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$, $y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3$

13. Solução de EDO's por Séries de Potência

13.1. Solução em Séries de Potência

A solução de equações diferenciais por séries de potência é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 01: Se $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas em x_0, então qualquer solução da equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

também é analítica em x_0, de modo que a solução pode ser expressa como:

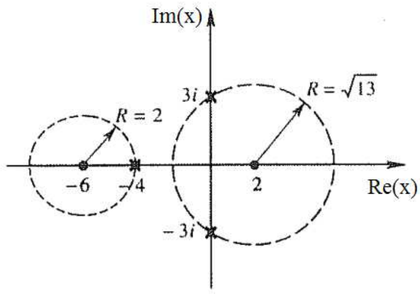
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Além disso, o raio de convergência de qualquer termo do somatório anterior é maior ou igual ao menor raio de convergência de $p(x)$ ou $q(x)$.

Em muitos casos $p(x)$ e $q(x)$ são funções racionais (razão entre dois polinômios). Por exemplo, considere $p(x) = f(x)/g(x)$. Neste caso, $p(x)$ será singular somente nas raízes de $g(x)$ e o raio de convergência de $p(x)$ em torno de x_0 será igual à distância entre x_0 e a raíz mais próxima (no plano complexo).

Por exemplo, considere $p(x) = (2 + 3x)/((x + 4)(x^2 + 9))$. As raízes do denominador são $x = -4$ e $x = \pm 3i$. Escolhendo $x_0 = -6$ e $x_0 = 2$, os raios de convergência são mostrados na figura a seguir:

Este teorema pode ser visto como uma extensão do teorema que permite avaliar a existência e unicidade da solução, que dizia que se $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ fossem contínuas no intervalo, então existiria alguma solução geral para a equação. Este novo teorema diz que se $p(x)$ e $q(x)$, além de contínuas, forem também analíticas, a solução existe e também é analítica e portanto pode ser representada como uma série de potências.



No caso onde $p(x)$ e $q(x)$ são constantes, pode-se resolver a EDO com o uso da equação caraterística. No entanto, para o caso de coeficientes variáveis, este método não pode ser empregado, sendo a solução por séries de potência uma alternativa simples.

Exemplo 01: Utilizando séries de potência, obtenha a solução geral para o seguinte PVI:

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

Esta equação possui coeficientes constantes, mas será utilizada como exemplo para apresentar o método. Neste caso, $p(x) = 0$ e $q(x) = 1$, portanto ambas são analíticas em qualquer ponto. Assim, a solução obtida será válida em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$. Além disso, conforme o teorema anterior, isto implica que a solução pode ser expressa como uma série de potência:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

onde x_0 é algum ponto ordinário. Como $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas para qualquer x, pode-se escolher $x_0 = 0$ por simplicidade:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Para conhecer a solução, é necessário agora determinar os coeficientes a_n. Este método pode ser visto como uma extensão do método dos coeficientes indeterminados. Para determinar a_n, pode-se substituir a solução na equação diferencial. Avaliando as derivadas:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Substituindo na equação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Para combinar as duas séries, é necessário que os expoentes de x sejam os mesmos. Para isso, pode-se deslocar o índice do somatório em qualquer uma das séries. Por exemplo, pode-se deslocar o índice na primeira série em duas unidades $n = n + 2$, resultando em:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

O procedimento anterior pode ser adotado pois o índice funciona somente como um auxiliar no somatório. Por exemplo, para deslocar o somatório em k unidades:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = a_n x^n = \sum_{n-k=0}^{\infty} a_{n-k}x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k}x^{n-k}$$

Avaliando termo a termo:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Com isso, juntando os somatórios e colocando os termos em evidência:

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n)x^n = 0$$

Para garantir que o somatório resulte em zero para todo x, é necessário que cada termo do somatório seja nulo:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A expressão anterior permite estabelecer uma relação entre a_{n+2} e a_n

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Assim, pode-se determinar um termo a_{n+2} qualquer conhecendo-se o termo que o antecede em duas posições. Este tipo de relação é chamada de *fórmula de recorrência*. Por exemplo, se a_0 e a_1 forem conhecidos, todos os demais termos podem ser avaliados.

Todos os termos pares podem ser avaliados em função de a_0. Fazendo $n = 0$:

$$a_2 = -\frac{a_0}{(2)(1)} = -\frac{a_0}{2!}$$

Para $n = 2$:

$$a_4 = -\frac{a_2}{(4)(3)} = \frac{a_0}{(4)(3)(2!)} = \frac{a_0}{4!}$$

Para $n = 4$:

$$a_6 = -\frac{a_4}{(6)(5)} = -\frac{a_0}{6!}$$

Os termos ímpares são avaliados em função de a_1. Fazendo $n = 1$:

$$a_3 = -\frac{a_1}{(3)(2)} = -\frac{a_1}{3!}$$

Para os demais termos:

$$a_5 = -\frac{a_3}{(5)(4)} = \frac{a_1}{5!}$$
$$a_7 = -\frac{a_5}{(7)(6)} = -\frac{a_1}{7!}$$

Lembrando que a solução proposta é da forma:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

A expressão anterior pode ser escrita como:

$$y(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots) + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots)$$

Substituindo as expressões obtidas anteriormente:

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

Os termos entre parênteses representam funções de x que podem ser avaliadas. Os termos a_0 e a_1 são definidas com base nas condições de contorno especificadas. Assim, a solução geral da EDO será:

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$$
$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad\qquad y_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Neste caso em particular, $y_1(x)$ corresponde exatamente à expansão da função $\cos(x)$ em torno de $x_0 = 0$, enquanto que $y_2(x)$ corresponde à expansão de $\sin(x)$ em torno do mesmo ponto. No entanto, usualmente a solução obtida não corresponde a nenhuma função conhecida.

Aplicando a condição inicial $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 = a_0(1) + a_1(0) \qquad \rightarrow \qquad a_0 = 0$$

Avaliando $y'(x)$ considerando $a_0 = 0$:

$$y'(x) = a_1\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)$$

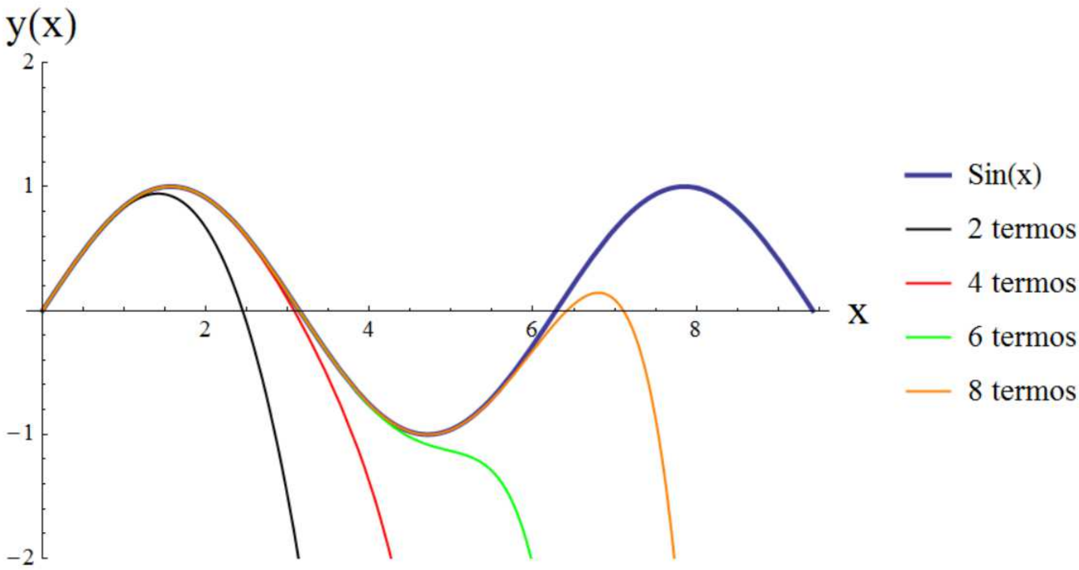
Aplicando a condição inicial $y'(0) = 1$:

$$y'(0) = 1 = a_1(1) \qquad \rightarrow \qquad a_1 = 1$$

Assim, a solução particular será:

$$y(x) = y_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Como dito anteriormente, esta solução corresponde à expansão da função $\sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$. No entanto, a forma obtida corresponde a uma série infinita, de modo que sempre representa uma aproximação da solução real visto que somente um número finito de termos podem ser computado. Quanto maior o número de termos considerados, maior ser o *intervalo* em torno de x_0 onde a série representa bem a solução exata. Este comportamento é ilustrado na figura a seguir, onde a solução exata $y(x) = \sin(x)$ é comparada com as aproximações em série considerado diferentes quantidades de termos. Como pode ser observados, conforme mais termos são considerados, maior é o intervalo em torno de $x_0 = 0$ onde a série coincide com a solução exata.



Não é necessário conferir a convergência das séries, pois pelo teorema visto anteriormente, pode-se concluir que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ também convergem.

Para verificar se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções, pode-se determinar o Wronskiano em algum ponto ordinário, por exemplo $x_0 = 0$:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Portanto, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ foram um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 02: Obtenha a solução geral para a seguinte EDO linear com coeficientes variáveis:

$$y'' + xy = 0$$

De forma semelhante ao realizado anteriormente, a solução proposta é da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \rightarrow \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad y'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Neste caso, os expoentes de x estão separados por 3 unidades. Deslocando o índice em 3 unidades no segundo somatório:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} = 0$$

Pode-se perceber que a alteração no índice não altera os termos do somatório. Para poder juntar os termos em um único somatório, além dos expoentes idênticos, o índice do somatório deve começar no mesmo valor. A relação anterior pode ser reescrita como:

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} = 0$$

Agora os somatórios podem ser juntados:

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} ((n-1) n a_n + a_{n-3}) x^{n-2} = 0$$

Novamente, para que a solução seja igual a zero para qualquer valor de x, os coeficientes do somatório devem ser nulos. Além disso, o termo $2a_2$ é a única constante, já que todos os termos do somatórios multiplicam x ou alguma potência de x. Portanto para garantir a igualdade, é necessário que $a_2 = 0$. Avaliando os índices do somatório, para $n \geq 3$:

$$(n-1) n a_n + a_{n-3} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a_n = -\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}$$

Assim, conhecendo-se o valor em três posições anteriores, pode-se determinar a_n.

Considerando novamente que a_0 e a_1 são constantes arbitrárias, pode-se avaliar os demais termos. Avaliando para $n = 3$, $n = 6$, $n = 9$, etc.:

$$a_3 = -\frac{a_0}{(3)(2)} \qquad\qquad a_6 = -\frac{a_3}{(6)(5)} = \frac{a_0}{(6)(5)(3)(2)}$$

De forma semelhante, para $n = 4$, $n = 7$, $n = 10$, etc.:

$$a_4 = -\frac{a_1}{(4)(3)} \qquad\qquad a_7 = -\frac{a_4}{(7)(6)} = \frac{a_1}{(7)(6)(4)(3)}$$

Como $a_2 = 0$, todos os termos a_5, a_8, a_{11}, etc. também serão nulos.

A solução proposta pode ser expressa como:

$$y(x) = (a_0 + a_3x^3 + a_6x^6 + \ldots) + (a_1x + a_4x^4 + a_7x^7 + \ldots) + (a_2x^2 + a_5x^5 + a_8x^8 + \ldots)$$

Colocando as constantes em evidência e substituindo os valores obtidos anteriormente:

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^3}{(3)(2)} + \frac{x^6}{(6)(5)(3)(2)} - \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^4}{(4)(3)} + \frac{x^7}{(7)(6)(4)(3)} - \ldots\right)$$

Assim como no exemplo anterior, os termos em parênteses representam funções de x, de modo que a solução geral pode ser expressa como:

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$$

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^3}{(3)(2)} + \frac{x^6}{(6)(5)(3)(2)} - \ldots \qquad y_2(x) = x - \frac{x^4}{(4)(3)} + \frac{x^7}{(7)(6)(4)(3)} - \ldots$$

Avaliando o Wronskiano em $x = 0$:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Portanto, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 03: Utilizando o método de Séries de Potência, obtenha a solução geral da seguinte EDO:

$$(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

Neste caso, as funções $p(x)$ e $q(x)$ são:

$$p(x) = \frac{-x}{2 + x^2} \qquad q(x) = \frac{4}{2 + x^2}$$

Sendo que ambas são analíticas para qualquer x.

Considerando uma solução como uma expansão em torno de $x_0 = 0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}$$

Substituindo na EDO:

$$(2 + x^2)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

Fazendo a multiplicação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)na_nx^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_nx^n = 0$$

Ajustando o expoente do primeiro termo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_nx^n = 0$$

Para poder juntar os somatórios, pode-se separar os termos com expoentes x^0 e x^1 para todos os somatórios começarem em $n = 2$:

$$4a_2 + 12a_3x - a_1x + 4a_0 + 4a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}(2(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-1)na_n - na_n + 4a_n)x^n = 0$$

Simplificando:

$$(12a_3 + 3a_1)x + (4a_2 + 4a_0) + \sum_{n=2}^{\infty}(2(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n^2 - 2n + 4)a_n)x^n = 0$$

Para que o polinômio resultante seja igual a zero para todos os valores de x, é preciso que os coeficientes de todas as ordem sejam nulos. Assim, avaliando os termos de ordem 0 e 1:

$$4a_2 + 4a_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad a_2 = -a_0$$

$$12a_3 + 3a_1 \qquad \rightarrow \qquad a_3 = -\frac{a_1}{4}$$

Para os demais termos, pode-se utilizar a fórmula de recorrência:

$$(2(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n^2 - 2n + 4)a_n) \qquad \rightarrow \qquad a_{n+2} = -\frac{(n^2 - 2n + 4)a_n}{2(n+1)(n+2)} \qquad n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Avaliando para diferentes valores de n:

$$n = 2 \qquad \rightarrow \qquad a_4 = -\frac{6a_2}{24} = \frac{a_0}{6}$$

$$n = 3 \qquad \rightarrow \qquad a_5 = -\frac{7a_3}{40} = \frac{7a_1}{160}$$

$$n = 4 \qquad \rightarrow \qquad a_6 = -\frac{12a_4}{60} = -\frac{a_0}{30}$$

$$n = 5 \qquad \rightarrow \qquad a_7 = -\frac{19a_5}{84} = -\frac{19a_1}{1920}$$

Considerando a solução:

$$y(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots) + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots)$$

Substituindo os termos obtidos:

$$y(x) = a_0\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{30} + \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{4} + \frac{7x^5}{160} - \frac{19x^7}{1920} + \ldots\right)$$

Exemplo 04: Considere a seguinte EDO::

$$(1-x^2)y'' + xy' - y = 0$$

Obtenha uma solução em torno do ponto $x_0 = 0$. Em qual intervalo esta solução é válida?

Neste caso, temos que $p(x) = x/(1-x^2)$ e $q(x) = 1/(1-x^2)$, de modo que $x = \pm 1$ são raízes do denominador e o raio de convergência em torno de x_0 será 1. Portanto, a solução obtida será válida no intervalo $x \in (-1, 1)$.

Considerando que $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas em $x_0 = 0$, a solução será da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \rightarrow \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Multiplicando os termos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Ajustando o expoente do primeiro somatório:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Separando os termos até $n = 2$ e juntando os somatórios:

$$2a_2 + 4a_3 x + a_1 x - a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + n a_n - a_n)x^n = 0$$

Simplificando:

$$4a_3 x + (2a_2 - a_0) + \sum_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - 2n + 1)a_n)x^n = 0$$

Avaliando os termos de ordem zero:

$$a_2 = \frac{a_0}{2}$$

Para os termos de ordem um:

$$a_3 = 0$$

Para os demais termos:

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Avaliando alguns termos:

$$a_4 = \frac{1}{(4)(3)} a_2 = \frac{1}{4!} a_0$$

$$a_5 = \frac{4}{(5)(4)} a_3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad a_7 = a_9 = a_{11} = \ldots = 0$$

$$a_6 = \frac{9}{(6)(5)} a_4 = \frac{9}{6!} a_0$$

$$a_8 = \frac{25}{(8)(7)} a_6 = \frac{25}{8!} a_0$$

Assim, considerando a solução:

$$y(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + a_8 x^8 + \ldots) + (a_3 x^3 + a_5 x^5 + a^7 x^7 + \ldots)$$

Substituindo os valores encontrados e considerando a_0 e a_1 como constantes:

$$y(x) = a_1 x + a_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{9x^6}{6!} + \frac{25x^8}{8!} + \ldots\right)$$

Neste caso, as duas soluções obtidas são:

$$y_1(x) = x$$

$$y_2(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{9x^6}{6!} + \frac{25x^8}{8!} + \ldots\right)$$

Verificando se as soluções são L.I. em $x_0 = 0$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Exemplo 05: Uma importante equação que pode ser resolvida através de séries de potência é a equação de Chebyshev:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha y = 0$$

onde α é um parâmetro. Determine a solução geral para esta equação em torno de $x_0 = 0$. Em que intervalo esta solução é válida?

Lista de Exercícios - Resolução de EDO's por Séries de Potência

1) Utilize o método de séries de potência para obter a solução geral para as seguintes EDO's em torno de $x_0 = 0$. Avalie o intervalo de validade das soluções.

a) $y'' - y = 0$

R: $y(x) = a_0(1 + x^2/2! + x^4/4! + \ldots) + a_1(x + x^3/3! + x^5/5! + \ldots)$

b) $y'' + xy' + y = 0$

R: $y(x) = a_0(1 - x^2/2 + x^4/(4 \cdot 2) - x^6/(6 \cdot 4 \cdot 2) + \ldots) + a_1(x - x^3/3 + x^5/(5 \cdot 3) - x^7(7 \cdot 5 \cdot 3) + \ldots)$

c) $y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$

R: $y(x) = a_0(1 - x^2/2 + x^4/8 - x^6/48 + x^8/384 - \ldots) + a_1(x - x^3/2 + x^5/8 - x^7/48 + x^9/384 - \ldots)$

d) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$

R: $y(x) = a_0(1+x^2+x^4/2+x^6/6+x^8/24+\ldots)+a_1(x+x^3/3+x^5/2+x^7/6+x^9/24+\ldots) = a_1e^{x^2}+a_2xe^{x^2}$

2) **Equações de 1^a ordem:** O método de expansão em séries de potência pode também ser empregado para a resolução de EDO's de primeira ordem do tipo $y' + p(x)y = 0$, desde que $p(x)$ seja anlítica no ponto x_0 onde a expansão é realizada. Utilize este método para encontrar a solução geral das seguintes EDO's em torno do ponto $x_0 = 0$:

a) $y' + y = 0$

R: $y(x) = a_0(1 - x + x^2/2! - x^3/3! + x^4/4! + \ldots) = a_0e^{-x}$

b) $(1 - x)y' - y = 0$

R: $y(x) = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) \qquad (-1 < x < 1)$

3) Utilizando o método de séries de potência, encontre a solução particular para os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' + (x - x^2)y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = -3$

R: $y(x) = 2 - 3x - x^2 + x^3 - 3x^5/10 + x^6/10 + \ldots$

b) $y'' + 2(1 - x)y' - 3xy = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$

R: $y(x) = 1 - x + x^2 - x^3/2 + x^4/3 - 2x^5/15 \ldots$

4) Considere a seguinte EDO, conhecida como equação de Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

onde $\alpha \geq 0$ é um parâmetro real. Esta equação possui diversas aplicações nas áreas de mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, mecânica quântica, entre outras, principalmente em problemas que envolvem simetrias esféricas.

Apesar de possuir pontos singulares em $x \pm 1$, os coeficientes da equação são analíticos em $x = 0$, de modo que pode-se obter uma solução analítica no intervalo $-1 < x < 1$ através da expansão em séries de potência em torno do ponto $x_0 = 0$.

a) Mostre que a solução geral da equação de Legendre é da forma:

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

onde

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 - \ldots$$
$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 - \ldots$$

b) Considerando que $\alpha = m$ seja um inteiro positivo, $y_1(x)$ irá terminar após m termos caso m seja par e $y_2(x)$ irá terminar após m termos caso m seja ímpar. Os polinômios finitos obtidos neste casos são usados como base para definir os polinômios de Legendre de ordem m, P_m. Por exemplo, para $m = \alpha = 2$, a substituição em $y_1(x)$ resulta em:

$$y_1^{\alpha=2} = 1 - 3x^2$$

O polinômio de Legendre equivalente é obtido da seguinte forma:

$$P_2 = c(1 - 3x^2)$$

A constante c é definida de forma que $P(x = 1) = 1$. Assim:

$$P_2(x = 1) = c(1 - 3) = 1 \qquad \rightarrow \qquad c = -\frac{1}{2}$$

Portanto:

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Obtenha as expressões equivalentes para os seis primeiros polinômios de Legendre (ou seja, P_0 até P_5).

R: $P_1 = x$, $P_5(x) = 1/8(65x^5 - 70x^3 + 15x)$

14. Séries de Fourier

As séries de Fourier são utilizadas para representar funções em termos de um somatório de funções mais simples, neste caso senos e cossenos. A utilização das séries de Fourier é similar às séries de Taylor, onde uma dada função pode ser representada em termos uma série de potências. Devido ao comportamento periódico das funções seno e cosseno, a representação de uma função em termos de séries de Fourier resulta em uma função periódica. Por isso, as séries de Fourier são muito utilizadas para a resolução de problemas de valor de contorno (PVC) e equações diferenciais parciais (EDP), onde existe um domínio de solução finito em relação à alguma das variáveis independentes.

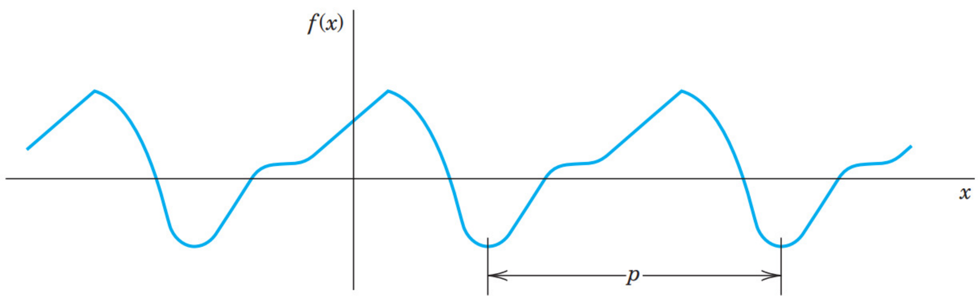
Uma função $f(x)$ é dita periódica se existe algum valor positivo p, chamado de período da função, tal que:

$$f(x+p) = f(x)$$

Isto também implica que:

$$f(x+np) = f(x)$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Eventualmente a função $f(x)$ pode não ser definida em alguns pontos específicos. Por exemplo, a função $f(x) = \tan(x)$ não é definida em $x = \pm, \pi/2$, $x = \pm 3\pi/2, \ldots$. Ainda assim, trata-se de uma função periódica. Um exemplo de função periódica é apresentado na figura a seguir.



Função periódica com período p

Para uma função $f(x)$ com um período $p = 2L$ qualquer, a expansão em séries de Fourier é dada por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Para poder expressar a função desta forma, deve-se determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n. Para isso, é preciso recorrer a uma propriedade das funções seno e cosseno chamada *ortogonalidade*.

Ortogonalidade: O produto interno de duas funções $u(x)$ e $v(x)$ no intervalo $\alpha \geq x \geq \beta$ é definido como:

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx$$

As funções $u(x)$ e $v(x)$ são ditas ortogonais no intervalo se $(u, v) = 0$. De forma equivalente, um conjunto de m funções é dito ortogonal se cada par de funções diferentes do conjunto for ortogonal.

As funções $\cos(m\pi x/L)$ e $\sin(n\pi x/L)$ formam um conjunto ortogonal no intervalo $-L \geq x \geq L$ para $m \neq n$. Isto implica que:

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ L & \text{se} \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \qquad \forall\, m, n$$

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ L & \text{se} \quad m = n \end{cases}$$

14.1. Fórmulas de Euler-Fourier

Considere novamente a expansão de $f(x)$ em séries de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \frac{m\pi x}{L} \right)$$

A função $f(x)$ é uma função conhecida, sendo que o objetivo agora é encontrar os valores dos coeficientes a_0, a_m e b_m que satisfaçam a igualdade, o que pode ser conseguido utilizando as relações de ortogonalidade.

Para determinar o valor de a_0, podemos integrar a expressão de $-L$ até L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

A segunda integral do lado direito pode ser avaliada como:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}dx = \left(\frac{L}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = \frac{L}{m\pi}(\sin(m\pi) - \sin(-m\pi))$$

Como m é um inteiro positivo, $\sin(m\pi) = \sin(-m\pi) = 0$.

De forma semelhante:

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}dx = -\left(\frac{L}{m\pi}cos\frac{m\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = -\frac{L}{m\pi}(cos(m\pi) - cos(-m\pi))$$

Considerando que $cos(x) = cos(-x)$, a integral acima também é nula. Com isso:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = a_0 L \qquad \rightarrow \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Multiplicando a equação por $cos(n\pi x/L)$, onde n é um inteiro positivo (constante) e integrando de $-L$ até L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

Considerando ainda a ortogonalidade das funções, o único termo não-nulo do lado direito será a segunda integral quando $m = n$. Assim:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = La_n \qquad \rightarrow \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Fazendo $n = 0$, obtém-se exatamente a expressão anterior para a_0. Com isso:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

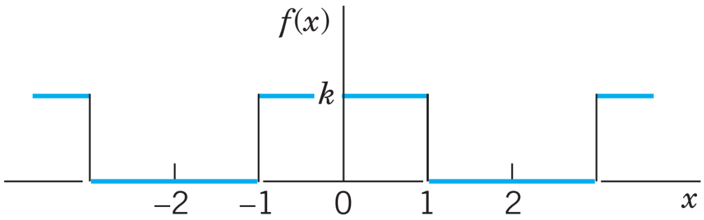
Pode-se obter uma expressão semelhante para b_n multiplicando a equação original por $\sin(n\pi x/L)$ e integrando de $-L$ a L:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

As expressões para a_n e b_n são conhecidas como fórmulas de Euler-Fourier.

Exemplo 02: Obtenha os coeficientes de Fourier para a seguinte função $f(x)$ com período $p = 4$, de modo que $L = p/2 = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 < x < -1 \\ k & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$



Avaliando inicialmente o coeficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1}(0)dx + \int_{-1}^{1} kdx + \int_{1}^{2}(0)dx\right) = \frac{k}{2}$$

Para os coeficientes a_n, temos:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{1}^{2}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

Como as integrais nos intervalos onde $f(x) = 0$ são nulas:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

A expressão acima resulta em $a_n = 0$ para n par e $a_n = 2k/n\pi$ para $n = 1, 5, 9, \ldots$ e $a_n = -2k/n\pi$ para $n = 3, 7, 11, \ldots$.

De forma semelhante, para os coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{k}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{-n\pi}{2}\right) = 0$$

Para a expressão anterior, considerou-se que $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$. Assim, a funç ão $f(x)$ pode ser expressa como:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Avaliando alguns termos dos somatório:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2} + \ldots\right)$$

14.2. Funções Pares e Ímpares

As fórmulas de Euler-Fourier podem ser simplificadas para funções pares e ímpares.

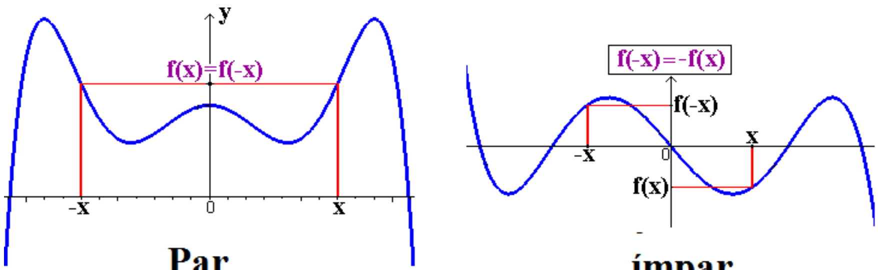
Uma função é dita par se:

$$f(-x) = f(x)$$

por exemplo, $cos(x)$ é uma função par. A função é dita ímpar se:

$$f(x) = -f(-x)$$

por exemplo, $\sin(x)$ é ímpar.



Par

ímpar

Pode-se mostrar que, se uma função $f(x)$ é par, então:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Do mesmo modo, se $f(x)$ for ímpar:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

Além disso, o produto de duas funções pares ou duas ímpares será par, enquanto que o produto de uma função par por uma ímpar será ímpar.

Séries em Cossenos: Considere que $f(x)$ seja uma função par e periódica com período 2L. Isto implica que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é par e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ é ímpar. Como consequência:

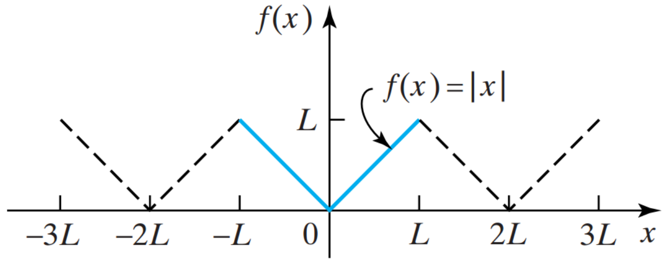
$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = 0 \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Isto implica que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

Exemplo 03: Obtenha a representação em séries de Fourier para a função $f(x) = |x|$ no intervalo $-L < x < L$.



Como esta função é par, como consequência $b_n = 0$. Para os demais coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L x dx = \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \cos\frac{n\pi x}{L} dx$$

Esta integral pode ser avaliada por partes, fazendo $u = x$ e $v' = \cos(n\pi x/L)$, de modo que $v = (L/n\pi)\sin(n\pi x/L)$:

$$\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Assim:

$$\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L$$

Dessa forma, os coeficientes a_n serão:

$$a_n = \frac{2}{L}\left(\frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$$

Considerando que $\sin(n\pi) = 0$ o termo envolvendo o seno será nulo. Além disso, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, de modo que os coeficientes serão:

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como o termo $(-1)^n - 1$ será igual a zero para valores de n pares e igual a -2 para valores de n ímpares, a expansão para $f(x)$ será:

$$f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{L} + \frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi x}{L} + \ldots\right)$$

Séries em Senos: Considere que $f(x)$ seja uma função ímpar e periódica com período 2L. Isto implica que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é ímpar e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ é par. Como consequência:

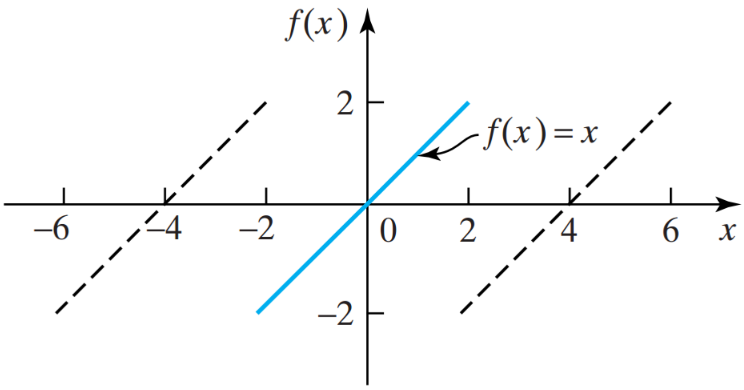
$$a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Exemplo 04: Obtenha a representação em séries de Fourier para a função $f(x) = x$ no intervalo $-2 < x < 2$.



Neste caso trata-se de uma função ímpar, o que implica que $a_0 = a_n = 0$. Considerando que $L = 2$, os coeficientes b_n são:

$$b_n = 2\int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

Resolvendo a integral por partes:

$$b_n = \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_0^2$$

Considerando novamente que $\sin(n\pi) = 0$:

$$b_n = -\frac{4}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Assim, a expansão em séries de Fourier será:

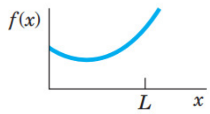
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right)$$

14.3. Expansão em Meio Período

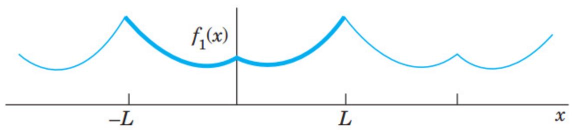
Como visto anteriormente, expressões simplificadas podem ser obtidas considerando que uma função $f(x)$ definida em um intervalo $-L \leq x \leq L$ é par ou ímpar. Na resolução de equações diferenciais parciais por separação de variáveis, é comum surgir funções definidas no intervalo $0 \leq x \leq L$. Neste caso, as relações anteriores podem ser úteis para definir as séries de Fourier para funções definidas somente nestes intervalo. Isto pode ser conseguido através da extensão da função $f(x)$ para um intervalo $[-L, L]$ de modo a se obter uma função para ou ímpar.

A forma como a função é definida no intervalo $-L \leq x < 0$ é irrelevante, já que o intervalo de solução é somente $0 \leq x \leq L$. Por isso, pode-se fazer uma extensão par ou ímpar da função, conforme for mais conveniente.

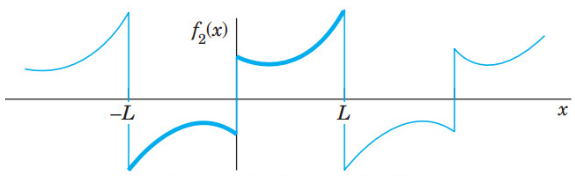
Por exemplo, considere uma função $f(x)$ definida em $[0, L]$, como apresentado na Figura a seguir.



Função f(x) original



Extensão par de f(x)



Extensão ímpar de f(x)

A extensão par desta função é definida como:

$$f_1 = \begin{cases} f(-x) & -L \leq x < 0 \\ f(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Dessa forma, a função f_1 é par e definida no intervalo $-L < x < L$, de modo que a série em cossenos pode ser aplicada. A extensão ímpar, por sua vez, é definida como:

$$f_2 = \begin{cases} -f(-x) & -L \leq x < 0 \\ f(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

De forma similar, f_2 é ímpar e definida no intervalo $-L < x < L$, de modo que a série em senos pode ser aplicada

Assim, pode-se usar as séries em seno ou em cosseno para avaliar qualquer função no intervalo $[0, L]$, ou seja, se f_1 e f_2 podem ser representadas no intervalo $[-L, L]$, então $f(x)$ pode ser representada em $[0, L]$.

Lista de Exercícios - Séries de Fourier

01) Encontre as expansões em séries de cossenos (a) e de senos (b) para as seguintes funções definidas no intervalo $0 < x < L$. Para isto, faça as extensões par e ímpar da função dada no intervalo $-L < x < 0$.

a) $f(x) = x \qquad (0 < x < 1/2)$

R: $(a) f(x) = 1/4 - (2/\pi^2)(\cos 2\pi x + (\cos 6\pi x)/9 + (\cos 10\pi x)/25 + \ldots) \qquad (b) f(x) = (1/\pi)(\sin 2\pi x - (\sin 4\pi x)/2 + (\sin 6\pi x)/3 - (\sin 8\pi x)/4 + \ldots)$

b) $f(x) = x^2 \qquad (0 < x < L)$

R: $(a) f(x) = L^2/3 - (4L^2/\pi^2)(\cos(\pi x/L) - (1/4)\cos(2\pi x/L) + (1/9)\cos(3\pi x/L) - \ldots) \qquad (b) f(x) = (2L^2/\pi)((1 - 4/\pi^2)\sin(\pi x/L) - (1/2)\sin(2\pi x/L) + (1/3 - 4/9\pi^2)\sin(3\pi x/L) - \ldots)$

15. Problemas de Autovalor

A aplicação do método de separação de variáveis para EDP's envolve a resolução de problemas de autovalor e a determinação de coeficientes através de séries de Fourier. Assim, antes de analisar o método de separação de variáveis, serão apresentados os fundamentos necessários sobre estes tópicos.

15.1. Problemas de Valor de Contorno e de Autovalores

Como comentado em aulas anteriores, equações diferenciais de ordem maior que um podem gerar problemas de valor inicial (PVI) ou problemas de valor de contorno (PVC), dependendo da forma como as condições são especificadas. Por exemplo, considere a EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Até o momento, foram analisados principalmente casos onde condições iniciais conhecidas são especificadas da forma:

$$y(x_0) = y_0 \qquad\qquad y'(x_0) = y_0'$$

originando desta forma um PVI.

Em muitos casos, os problemas envolvem condições conhecidas em pontos diferentes, sendo estas chamadas de condições de contorno, podendo ser expressas, por exemplo, como:

$$y(\alpha) = y_0 \qquad\qquad y(\beta) = y_1$$

De forma geral, os PVC's envolvem uma coordenada espacial como variável independente. Assim, a resolução de um PVC's consiste em buscar uma solução que satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < x < \beta$ juntamente com as condições de contorno especificadas.

Se $g(x) = 0$, o PVI associado é homogêneo. No entanto, para um PVC ser considerado homogêneo, além de $g(x) = 0$, deve-se ter também que $y_0 = y_1 = 0$, ou seja, as condições de contorno devem ser nulas. Assim como para o caso de PVI, se um PVC for homogêneo, uma possível solução para o problema é $y = 0$. Esta solução é chamada de ***solução trivial*** do PVC homogêneo.

Os critérios adotados para determinar a existência e unicidade de PVI's não podem ser diretamente aplicados a PVC's. Em muitos casos, um PVC pode não possuir solução, possuir infinitas soluções ou só admitir a solução trivial (caso for homogêneo). Para ilustrar estes comportamento, considere os exemplos a seguir.

Exemplo 01: Obtenha a solução do seguinte PVC:

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 1 \qquad y(\pi) = 0$$

Utilizando o método da equação característica, a solução da EDO é da forma:

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Aplicando a condição $y(0) = 1$, obtém-se:

$$y(0) = 1 = c_1(1) + c_2(0) \qquad \rightarrow \qquad c_1 = 1$$

Aplicando agora a segunda condição, obtém-se:

$$y(\pi) = 0 = c_1(-1) + c_2(0) \qquad \rightarrow \qquad c_1 = 0$$

Como as duas expressões são incompatíveis, portanto o problema não possui solução.

Exemplo 02: Obtenha a solução do seguinte PVC:

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

A solução da EDO é a mesma do caso anterior:

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Aplicando a condição $y(0) = 0$, obtém-se:

$$y(0) = 0 = c_1(1) + c_2(0) \qquad \rightarrow \qquad c_1 = 0$$

Considerando $c_1 = 0$, a aplicação da segunda condição resulta em:

$$y(\pi) = 0 = c_2 \sin(\pi) = c_2(0) = 0$$

Esta condição é satisfeita para qualquer valor de c_2, portanto existem infinitas soluções para o PVC.

15.2. Problemas de Autovalor

Em muitos casos os problemas de valor de contorno possuem um parâmetro λ em aberto que pode assumir diferentes valores, sendo que o problema só irá admitir soluções não-triviais para determinados valores deste parâmetro.

Por comparação, considere um sistema linear da forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Este problema admite a solução $\mathbf{x} = 0$ para qualquer valor de λ, porém, para determinados valores de λ (chamados autovalores) existem também soluções não-triviais (chamadas de autovetores).

Considere agora o PVC:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y(L) = 0$$

De forma semelhante, $y(x) = 0$ é uma possível solução para qualquer valor de λ, porém, novamente iríamos obter a solução trivial. Os valores de λ para os quais a equação tem soluções não-triviais são chamados, por analogia, de ***autovalores*** e as soluções associadas de ***autofunções***.

Pode-se mostrar que o problema anterior em específico só irá admitir soluções não-triviais quando $\lambda > 0$. Neste caso, a equação característica é $r^2 + \lambda = 0$, de modo que as raízes serão $r = \pm\sqrt{\lambda}i$ e a solução geral é:

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando a condição de contorno $y(0) = 0$, temos que:

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_1 = 0$$

Aplicando agora condição $y(L) = 0$, temos:

$$y(L) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

Novamente, esta condição pode ser satisfeita aplicando $C_2 = 0$, no entanto, isto irá levar à solução trivial. Oura maneira de satisfazer a condição é:

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

A função seno possui valor nulo para os múltiplos inteiros de π:

$$\sqrt{\lambda}L = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots = n\pi$$

Isolando os autovalores:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

O caso $n = 0$ pode ser omitido pois também irá levar à solução trivial. Neste caso, o valor da constante C_2 é arbitrário, pois automaticamente a equação diferencial e as condições de contorno serão satisfeitas para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Desse modo, existem infinitas soluções para o PVC que podem ser expressas como:

$$y(x) = C_n \sin\left(n\pi x/L\right) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Exemplo 03: Encontre os autovalores e as autofunções associadas ao seguinte problema de autovalor:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y'(L) = 0$$

Lista de Exercícios - Problemas de Autovalor e Séries de Fourier

1) Considere o problema de autovalor:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad\qquad y(L) = 0\,, L > 0$$

Mostre que para os casos $\lambda < 0$ e $\lambda = 0$ o problema só admite a solução trivial $y(x) = 0$.

2) Encontre a solução particular dos seguintes Problemas de Valor de Contorno ou mostre que o problema não possui solução ou possui infinitas soluções.

a) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$ *R:* $y(x) = -sin(x)$

b) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$ *R:* $y(x) = c_1 \sin(x)$ (Infinitas soluções)

c) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$ *R:* Sem solução

d) $y'' + 4y = \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
R: $y(x) = c_1 \sin(2x) + \sin(x)/3$ (Infinitas soluções)

e)$y'' + 4y = \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$ *R:* $y(x) = \sin(x)/3 - \sin(2x)/6$

3) Encontre os autovalores que garantem solução não-trivial para os seguintes Problemas de Valor de Contorno. Encontre também a solução do problema associada com os autovalores (autofunções).

a) $y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$
R: $\lambda = n^2, \quad y(x) = C_n \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$
R: $\lambda = ((2n-1)/2)^2, \quad y(x) = C_n \sin((2n-1)x/2), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$
R: $\lambda = ((2n-1)/2)^2, \quad y(x) = C_n \cos((2n-1)x/2), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

d) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y(L) = 0$
R: $\lambda = ((2n-1)\pi/2L)^2, \quad y(x) = C_n \cos((2n-1)\pi x/2L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

d) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(L) = 0$
R: $\lambda = (n\pi/L)^2, \quad y(x) = C_n \cos(n\pi x/L), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

4) Determine os coeficientes associados com a expansão das seguintes funções em séries de Fourier de senos no intervalo $[0, L]$.

a) $f(x) = 1$ *R:* $C_n = 2(1 - \cos(n\pi)/(n\pi))$

b) $f(x) = \sin(3\pi x/L)$ *R:* $C_n = 1$

16. Método de Separação de Variáveis

Diversas equações diferenciais parciais com estrutura simples podem ser resolvidas de forma analítica, sendo o método de separação de variáveis um dos mais empregados. Por exemplo, as equações do calor, de Laplace e da onda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

são exemplos de equações com grande potencial de aplicação que podem ser resolvidas por separação de variáveis.

A estratégia geral do método de separação de variáveis é supor que as funções de duas (ou mais) variáveis que são a solução da EDP podem ser expressas como o produto de funções de uma única variável. Por exemplo, uma solução da forma $u(x,t)$ pode ser expressa como:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

caso for possível determinar funções $X(x)$ e $T(t)$ que satisfaçam a equação diferencial parcial em conjunto com as condições iniciais e de contorno impostas, terá se encontrado uma solução para o problema. Para ilustrar a aplicação deste método, será considerado primeiramente a equação do calor com condições homogêneas. Cabe ressaltar que caso alguma condição de contorno ou inicial for alterada, a solução deve ser obtida novamente.

16.1. Equação do Calor

Considere, por exemplo, um problema envolvendo a condução de calor unidirecional em uma barra com comprimento L. A variação na temperatura ao longo da direção x e do tempo é dada por uma equação a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde α é a difusividade térmica do material. Considere que as extremidades da barra são mantidas em temperaturas constantes, de modo que, na forma adimensional, as condições de contorno podem ser expressas como:

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(L,t) = 0$$

Além disso, considere que a distribuição inicial de temperatura é dada por:

$$u(x,0) = f(x)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária.

Esta equação representa uma EDP linear, de segunda ordem e homogênea. O método de separação de variáveis consiste em supor que as soluções da EDP podem ser expressas como:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

ou seja, como o produto de uma função somente de x e outra somente de t. Substituindo na equação diferencial:

$$\frac{\partial(X(x)T(t))}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2(X(x)T(t))}{\partial x^2}$$

Considerando que as funções são consideradas constantes quando derivadas em relação a outra variável, a equação pode ser reescrita como:

$$XT' = \alpha TX'' \qquad \rightarrow \qquad \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T}$$

Desta forma, chega-se em uma relação do tipo $f(x) = g(t)$. Como tanto x quanto t são variáveis independentes, $g(t)$ não varia com x, da mesma forma que $f(x)$ não varia com t. A única forma de satisfazer esta igualdade é se ambas as funções forem iguais a uma constante. Esta constante será denominada de $-\lambda$, sendo que o sinal de menos é utilizado para simplificar a solução. Com isso:

$$XT' = \alpha TX'' \qquad \rightarrow \qquad \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

Assim, obtém-se duas EDO's:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad\qquad T' + \alpha\lambda T = 0$$

Estas equações não são acopladas, portanto podem ser resolvidas separadamente para qualquer valor de λ. No entanto, busca-se soluções que além de satisfazer a EDP original, também satisfaçam as condições impostas. A equação para T, em conjunto com a condição inicial

$u(x,0) = X(x)T(0) = f(x)$ formam um Problema de Valor Inicial e pode ser facilmente resolvida, desde que seja conhecida a função $X(x)$ e $f(x)$ seja especificada.

A equação para $X(x)$, por sua vez, deve ser satisfeita em duas posições (contornos) diferentes: $x = 0$ e $x = L$. Neste caso, a equação e as condições de contorno formam um Problema de Valor de Contorno.

16.1.1. Resolução do Problema de Valor de Contorno

Considere o PVC avaliado anteriormente:

$$X'' + \lambda X = 0$$

As condições de contorno associada são:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \qquad\qquad u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

Uma maneira de satisfazer as condições é impondo que $T(t) = 0$. No entanto, isto implica que $u(x,t) = X(x)T(t) = 0$ em qualquer ponto (solução trivial). Para evitar esta solução, deve ser considerado que:

$$X(0) = 0 \qquad\qquad X(L) = 0$$

Com isso, a EDO de segunda ordem possui duas condições de contorno associadas. Deve-se agora busca soluções que satisfaçam a equação $X'' + \lambda X = 0$ e as condições impostas. Esta solução pode existir somente para determinados valores de λ. Neste caso, a equação:

$$X'' + \lambda X = 0$$

forma um problema de autovalor.

O problema anterior só irá admite soluções não-triviais para o caso $\lambda > 0$. Esta equação, em conjunto com as condições de contorno anteriores, foram resolvidos na aula anterior, onde obtéve-se os seguintes autovalores:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e a solução associada ao problema obtida foi:

$$X(x) = C2_n \sin(n\pi x/L) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

16.1.2. Resolução do Problema de Valor Inicial

A partir do conhecimento dos autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, a EDO para $T(t)$ pode ser reescrita como:

$$T' + \alpha\lambda T = 0 \qquad \rightarrow \qquad T' + \frac{\alpha n^2\pi^2}{L^2}T = 0$$

Definindo $\mu = \alpha\pi^2/L^2$:

$$T' + \mu n^2 T = 0$$

A equação pode ser facilmente resolvida usando o método do fator integrante:

$$T(t) = C3_n e^{-\mu n^2 t} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A constante $C3_n$ depende do valor de n considerado. Com isso, a solução do EDP inicial pode ser expressa como:

$$u(x,t) = X(x)T(t) = C3_n e^{-\mu n^2 t} C2_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = C_n e^{-\mu n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para cada valor de n, obtém-se uma solução que satisfaz a equação diferencial em conjunto com as condições de contorno associadas. No entanto, a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ ainda não foi satisfeita.

Assim como visto anteriormente para PVI's de segunda ordem, se duas funções são soluções de uma determinada equação diferencial, então qualquer combinação linear entre elas também será solução. Este comportamento pode também ser estendido para este caso, de modo que as soluções para cada valor de n podem ser agrupadas em uma combinação linear, de modo que esta combinação também será solução da equação diferencial e irá satisfazer as condições de contorno. Caso for possível determinar os coeficientes de modo que a condição inicial também seja satisfeita, terá se encontrado uma solução da equação em conjunto com todas as condições impostas.

16.1.3. Superposição das Soluções

Para cada valor de n será obtida uma solução que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno em $x(0)$ e $x(L)$.

Princípio da Superposição: Se os termos do conjunto $u_n = u_1$, u_2, ... , u_N são soluções de uma EDP linear homogênea, então a combinação linear:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_N u_N$$

também será uma solução. Além disso, se u_n contém todas as soluções possíveis da equação, então u com certeza engloba o conjunto fundamental de soluções da equação.

Considerando o princípio de superposição, a solução geral da EDP será a soma das soluções para cada valor de n multiplicadas por uma constante:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu n^2 t} \sin(n\pi x/L)$$

Considerando que a função seno está limitada no intervalo $[-1,1]$ e μ é uma constante positiva, esta série converge no intervalo $0 < x < L$.

Esta solução satisfaz as condições de contorno, porém, a solução do problema deve também satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$. Substituindo na solução geral:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

Assim, deve-se determinar os valores de C_n de tal forma que o somatório convirga para $f(x)$ em $t = 0$, como será apresentado a seguir.

16.1.4. Solução Particular da Equação do Calor

A equação obtida anteriormente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde $f(x)$ é uma função conhecida, corresponde exatamente a séries de Fourier em senos. Portanto, os coeficientes são dados por:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Os valores de C_n poderiam também ser obtidos multiplicando-se a equação anterior por $sin(m\pi x/L)$, com m sendo um inteiro positivo, integrando de $-L$ a L e utilizando as relações de ortogonalidade.

Desse modo, a solução particular do problema é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

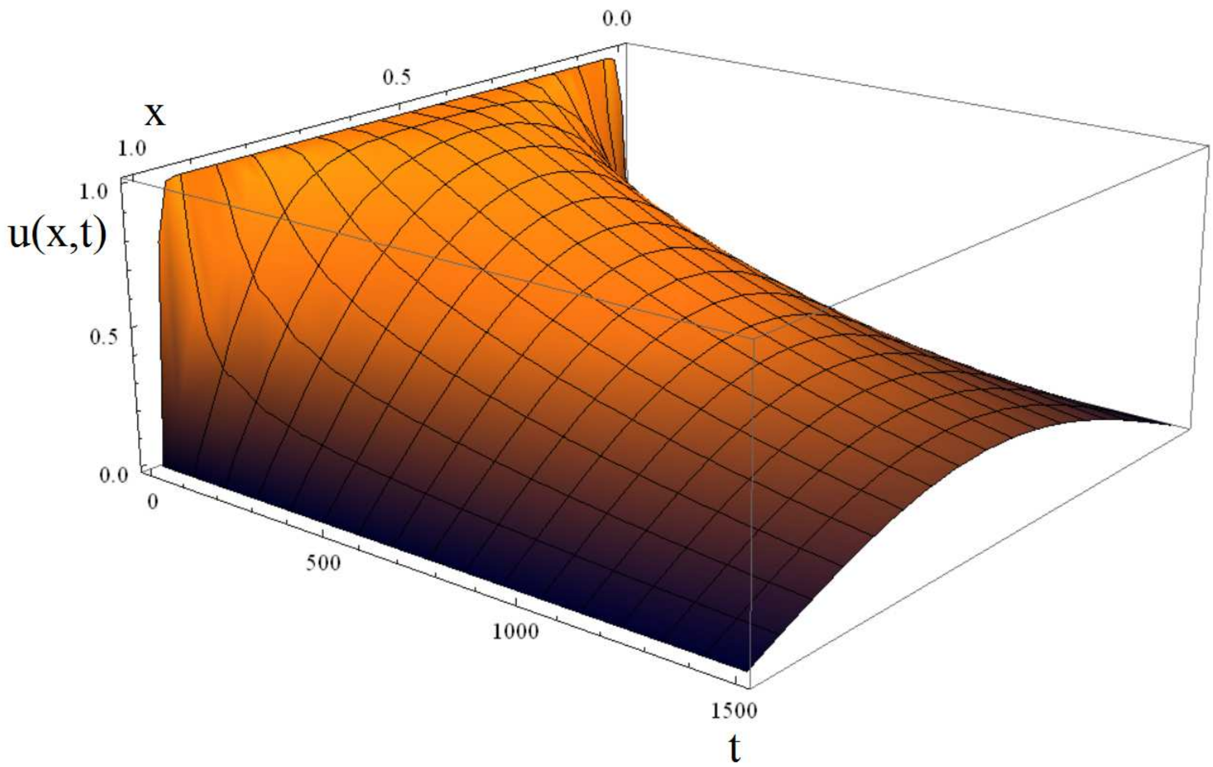
$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Por exemplo, considere um caso onde $f(x) = 1$. Com isso, pode-se obter que:

$$C_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \right) e^{-\mu n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

A partir do conhecimento dos parâmetros L e $\mu = \alpha\pi^2/L^2$, pode-se obter a solução para qualquer x e t. Para ilustrar, considere um caso onde $L = 1$ e $\alpha = 10^{-4}$. A variação na temperatura $u(x,t)$ é ilustrada na figura a seguir.



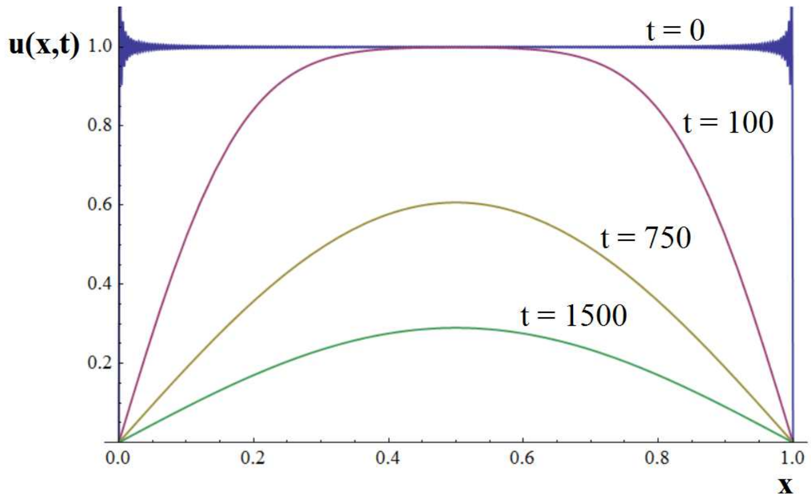
Para ilustrar melhor, na figura a seguir são apresentadas as curvas de $u(x,t)$ para diferentes valores de t. Estes resultados foram obtidos considerando 500 termos na série de Fourier.

Como pode ser visto, para $t = 0$ a solução apresenta uma pequena oscilação. Isto se deve a uma inconsistência que existe entre as condições de contorno e a condição inicial. Por exemplo, a condição de contorno em $x = 0$ expressa que:

$$u(0,t) = 0$$

Em contrapartida, a condição inicial (considerando $f(x0) = 1$) implica que:

$$u(x,0) = 1$$



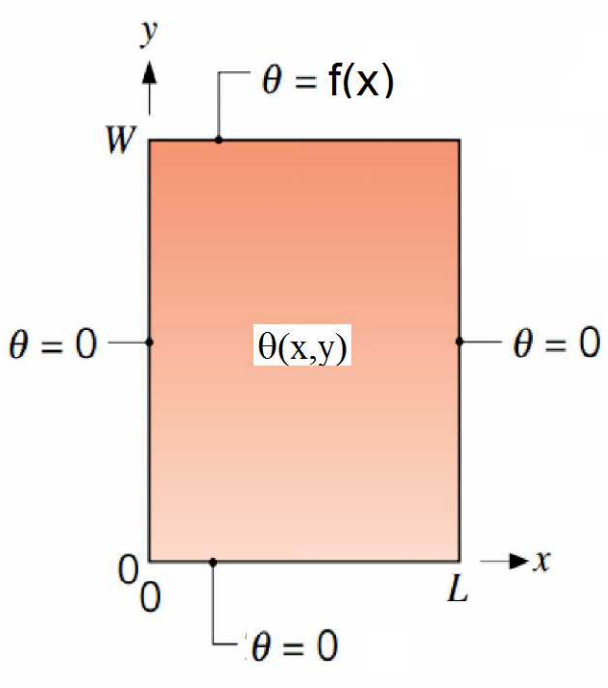
No ponto $u(0,0)$ existe uma sobreposição das condições (uma diz que deve ser zero e outra diz que deve ser um). Isto gera uma descontinuidade na solução obtida, o que faz com que a expansão em séries de Fourier oscile próximo a este ponto. Este comportamento é conhecido como ***fenômeno de Gibbs***. Esta oscilação não desaparece se mais termos na série forem considerados, porém ocorre um aumento na frequência da oscilação. Cabe destacar que esta oscilação para os instantes iniciais é puramente numérica, não deve-se esperar que este comportamento ocorra de fato em um sistema físico.

16.2. Equação de Laplace

A equação de Laplace é muito aplicada para a modelagem de problemas de difusão estacionários em mais de uma dimensão. Por exemplo, considere uma placa plana onde três fronteiras são mantidas em uma temperatura T_1 e uma fronteira é mantida em uma temperatura $f(x)$. Definindo $\theta = (T-T_1)/(T_2-T_1)$, onde T_2 é a temperatura máxima, a distribuição de temperatura $\theta(x,y)$ é dada pela equação:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0$$

Diferentemente da equação anterior, esta equação não envolve uma condição inicial. Para resolver a equação, é preciso especificar condições para a variável nas quatro fronteiras do sistema. Esta condições podem ser um valor conhecido para a variável, como neste caso (condições de primeira espécie) ou podem envolver a derivada da variável em relação a direção normal à superfície.



Para o caso avaliado, as condições impostas são:

$$\theta(0,y)=0 \qquad \theta(x,0)=0 \qquad \theta(L,y)=0 \qquad \theta(x,W)=f(x)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, será buscada uma solução da forma:

$$\theta(x,y)=X(x)Y(y)$$

Substituindo na EDP e separando as variáveis:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

Novamente, tem-se uma situação onde $f(x)=g(y)$, o que só pode ser satisfeita se ambas forem iguais a uma constante. Neste caso, será chamada de λ^2 para evitar o uso de $\sqrt{\lambda}$. Além disso, neste caso, caso a constante fosse negativa, a única solução possível seria a trivial.

Com isso, obtém-se dois problemas de autovalor independentes:

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}-\lambda^2Y=0$$

Ambas equações de segunda ordem, lineares e homogêneas podem ser facilmente resolvidas utilizando a equação característica. A equação para $X(x)$ irá possuir raízes $r_{1,2}=\pm\lambda i$, de modo que a solução geral será:

$$X(x)=C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x)$$

Para a equação para $Y(y)$, as raízes são $r_{1,2} = \pm\lambda$, de modo que a solução é:

$$Y(y) = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}$$

Com isso, a solução geral da EDP é:

$$\theta(x, y) = (C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x))(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})$$

Para determinar a solução particular, é preciso definir as quatro constantes de integração e a forma dos autovalores.

Utilizando a condição $\theta(0, y) = 0$, temos que:

$$\theta(0, y) = (C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0))(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$$

$$C_1(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$$

Para igualdade só pode ser satisfeita para qualquer valor de y no intervalor se $C_1 = 0$.

Aplicando a condição $\theta(x, 0) = 0$:

$$\theta(x, 0) = C_2 \sin(\lambda x)(C_3 e^0 + C_4 e^0) = C_2 \sin(\lambda x)(C_3 + C_4) = 0$$

Uma das maneiras de garantir a igualdade é fazendo C_2, no entanto, isto iria implicar que $X(x) = 0$ e portanto seria obtida a solução trivial. Outra maneira de satisfazer a igualdade é impondo que:

$$C_3 = -C_4$$

Dessa forma, até o momento, temos que:

$$X(x) = C_2 \sin(\lambda x) \qquad Y(y) = C_4(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) \qquad \rightarrow \qquad \theta(x, y) = C_5 \sin(\lambda x)(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$$

Utilizando a terceira condição de contorno homogênea $\theta(L, y) = 0$:

$$\theta(L, y) = C_5 \sin(\lambda L)(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0$$

Caso a condição $C_5 = 0$ fosse considerada, novamente iríamos recair na solução trivial. No entanto, o problema também admite solução para os casos onde:

$$\sin(\lambda L) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dessa forma, a solução será da forma:

$$\theta(x, y) = C_n \sin(\frac{n\pi x}{L})(e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L})$$

onde a constante C_5 foi substituída por C_n pois irá depender do valor de n.

Para simplificar a expressão obtida, pode-se considerar que:

$$e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L} = 2\sinh(n\pi y/L)$$

Assim, juntando a constante 2 com as constantes C_n:

$$\theta(x,y) = C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sinh\frac{n\pi y}{L}$$

Novamente, considerando o princípio de superposição, a solução geral será a combinação linear das soluções para cada valor de n:

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sinh\frac{n\pi y}{L}$$

Para determinar as constantes C_n, pode-se utilizar a condição de contorno $\theta(x,W) = f(x)$:

$$\theta(x,W) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sinh\frac{n\pi W}{L}$$

Considerando a expressão obtida anteriormente para a expansão em Fourier em séries de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Reconhecendo que

$$b_n = C_n \sinh\frac{n\pi W}{L}$$

os coeficientes são dados por:

$$b_n = C_n \sinh\frac{n\pi W}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Desse modo, a solução para o problema pode ser expressa como:

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

Por exemplo, considere o caso onde a fronteira superior é mantida em T_2, de modo que $f(x) = 1$ ao longo de toda a fronteira. Com isso, pode-se avaliar a integral:

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$= -\frac{L}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

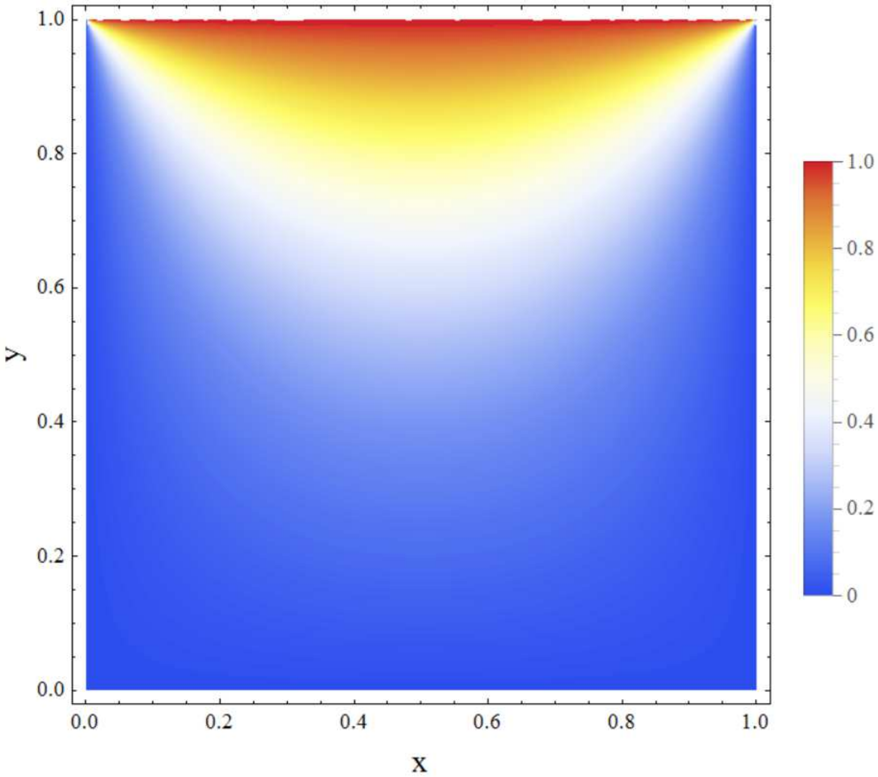
Assim, a solução para este caso seria:

$$\theta(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos(n\pi))}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

Como n é um inteiro positivo:

$$\theta(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^{n+1}+1)}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

Considerando $W = L = 1$ e avaliando os primeiros 500 termos da série, obtém-se o perfil de temperatura apresentado a seguir.



Lista de Exercícios - Método de Separação de Variáveis

1) ***(Equação do Calor)*** Considere a seguinte equação diferencial parcial com as condições de contorno e inicial associadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(\pi,t) = 0 \qquad\qquad u(x,0) = f(x)$$

Encontre a solução $u(x,t)$ para para o caso onde $f(x) = sen(x)$.

2) Considere uma barra homogênea com comprimento de $L = 50\,cm$ que está inicialmente a uma temperatura de $100°C$. Esta barra possui sua superfície lateral isolada, de modo que troca calor somente pelas extremidades. Se esta barra for mergulhada em um banho a $0°C$, determine a temperatura em seu ponto médio após 30 minutos (1800 s), supondo que (a) a barra é feita de um material isolante, com $\alpha = 0.025\,cm^2/s$ e (b) a barra é feita de um metal, com $\alpha = 0.35\,cm^2/s$. Considere que a equação que descreve a variação da temperatura ao longo do tempo e da posição x é:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

e que as condições de contorno e inicial associada são:

$$\theta(0,t) = 0 \qquad\qquad \theta(50,t) = 0 \qquad\qquad \theta(x,0) = 100$$

R: (a) $T = 98.32°C$, (b) $T = 10.59°C$

3) ***(Equação da Onda)*** Considere uma corda elástica de comprimento L esticada entre dois suportes em um plano horizontal. O deslocamento vertical $u(x,t)$ da corda em um ponto x no instante t é dador por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde a^2 é uma constante que depende do material.

(a) Mostre que esta equação pode ser separada em duas EDO's do tipo:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad\qquad T'' + a^2\lambda T = 0$$

(b) Utilizando o método de separação de variáveis, mostre que a solução geral deste problema é:

$$u(x,t) = (c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x)(c_3 \cos(a\sqrt{\lambda}t) + c_4 \sin a\sqrt{\lambda}t)$$

(c) Considere que a corda esteja fixa em $x = 0$ e $x = L$, de modo que:

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(L,t) = 0$$

Além disso, assuma que a velocidade inicial da corda é nula, de modo que a derivada de $u(x,t)$ em relação a t em $t = 0$ é zero. Considere também que a posição inicial da corda é dada por uma função $f(x)$, de forma que:

$$u(x,0) = f(x)$$

Utilizando as condições fornecidas, mostre que os problema só irá possuir soluções não-triviais para os autovalores:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

(d) Mostre que a solução particular será da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi a t}{L}$$

onde os coeficientes são dados por:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

4) ***(Equação de Laplace)*** Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$u(0,y) = 0 \qquad\qquad u(a,y) = 0 \qquad\qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = h(x) \qquad\qquad u(x,b) = 0 \qquad\qquad 0 \leq x \leq a$$

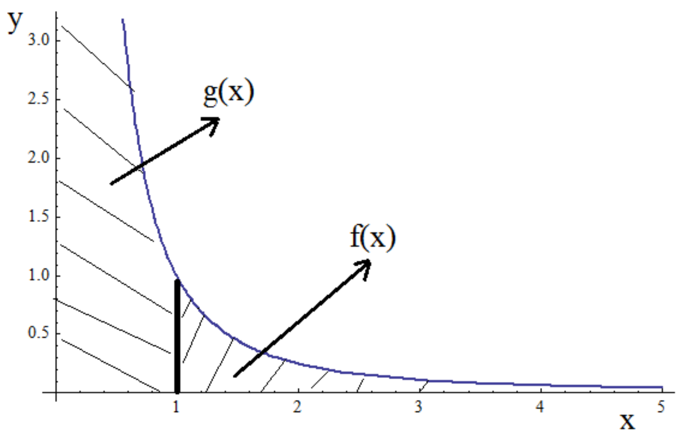
R: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{a} \int_0^a h(x) \sin\frac{n\pi x}{a} dx (e^{n\pi(y-2b)/a} - e^{-n\pi y/a})$

Anexos

A. Integrais Impróprias

Integrais impróprias são integrais definidas onde pelo menos um dos limites de integração tende ao infinito (tipo 1) ou existe alguma descontinuidade infinita no intervalo de integração (tipo 2). Por exemplo:

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \qquad\qquad g(x) = \int_0^{1} \frac{1}{x^2} dx$$



A.1. Integrais com Intervalos Infinitos

Considere a função $f(x) = 1/x^2$ integrada desde 1 até um ponto b qualquer. A integral representa a área abaixo da curva entre estes dois pontos ($S(b)$):

$$S(b) = \int_1^{b} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

Para nenhum valor de $b > 1$ esta área será maior que 1. Conforme o valor de t aumenta, mais a integral se aproxima de 1. Assim:

$$\lim_{b\to\infty} S(b) = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$

Assim, mesmo sendo avaliada em um intervalo infinito, a integral converge para um valor finito.

O mesmo procedimento pode ser usado para definir integrais impróprias com limites infinitos de forma geral como:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ou

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_b^a f(x)dx$$

Estas integrais são convergentes caso os limites existam e divergentes caso os limites não existam.

Exemplo 1: Determine:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$$

A integral pode ser avaliada como:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} (\ln(b) - \ln(1)) = \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty$$

Portanto, esta integral diverge.

Exemplo 2: Determine:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

Para avaliar a integral, pode-se fazer uma mudança de variáveis do tipo $u = 1 + x^2$, de modo que $du = 2xdx$. Quando $x = 0$, temos que $u = 1$ e conforme $x \to \infty$ o valor de $u \to \infty$. Assim:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2u^2}du = \lim_{b\to-\infty} \left(-\frac{1}{2u}\Big|_b^1 \right) = \lim_{b\to-\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2b} \right) = -\frac{1}{2}$$

Exemplo 3: Determine:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$$

A integral imprópria pode ser avaliada como:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 xe^x dx$$

Esta integral pode ser resolvida por partes, fazendo $u = x$ e $dv = e^x dx$, de modo que $du = dx$ e $v = e^x$. Assim:

$$\int uv' = uv - \int vu' \qquad \to \qquad \int_b^0 xe^x dx = xe^x\Big|_b^0 - \int_b^0 e^x dx = xe^x\Big|_b^0 - e^x\Big|_b^0$$

Substituindo na expressão anterior:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{b\to-\infty}\left(xe^x\Big|_b^0 - e^x\Big|_b^0\right) = \lim_{b\to-\infty}\left(-be^b - 1 + e^b\right)$$

O limite do primeiro termo gera uma indeterminação, podendo-se aplicar a regra de L'Hôspital:

$$\lim_{b\to-\infty} -be^b = \lim_{b\to-\infty} -\frac{b}{e^{-b}} = \lim_{b\to-\infty} -\frac{1}{-e^{-b}} = \lim_{b\to-\infty} e^b = 0$$

Assim, temos que:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{b\to-\infty}\left(-be^b - 1 + e^b\right) = 0 - 1 + 0 = -1$$

Exemplo 4: Determine para quais valores de p a integral a seguir converge e obtenha uma expressão para o valor da integral em função de p (considere que $p \neq 1$):

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Avaliando a integral, temos que:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{p-1}}{p-1}\right)$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{t^{1-p}-1}{p-1}\right)$$

Para que a integral não divirja, é necessário que o termo b^{1-p} decresça conforme $b \to \infty$, o que ocorre sempre que $p > 1$. Assim, a integral resulta em:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \qquad\qquad p > 1$$

Exemplo 5: Determine para quais valores de s a integral a seguir converge e obtenha uma expressão para o valor da integral em função de s:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t dt$$

A integral imprópria pode ser avaliada como:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t dt$$

Esta integral pode ser resolvida por partes, fazendo $u = t$ e $v' = e^{-st}$, de modo que $du = dt$ e $v = \frac{-e^{-st}}{s}$:

$$\int_0^b e^{-st} t = \frac{-e^{-st}}{s} t\Big|_0^b + \int_0^b \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{-e^{-st}}{s} t\Big|_0^b - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}$$

Avaliando o limite:

$$\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

O primeiro termo pode ser avaliado usando a regra de L'Hôspital:

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{be^{-sb}}{s} = \lim_{b\to\infty} -\frac{b}{se^{sb}} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s^2e^{sb}}$$

Para que o limite acima não divirja, é necessário que $s > 0$. Considerando isto, o limite tende a zero. Assim:

$$\int_0^\infty e^{-st}tdt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2} \qquad s > 0$$

A.2. Integrais com dois intervalos infinitos

Em muitos casos é necessário avaliar uma integral dentro de todo o intervalo $(-\infty, \infty)$. Neste caso não é possível simplesmente utilizar uma variável auxiliar e calcular o limite, pois o limite deve ser aplicado nos dois extremos. Quando isto ocorrer, deve-se dividir o intervalo de integração em (pelo menos) duas partes. Por exemplo:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

Exemplo 6: Determine a integral:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

Esta integral pode ser avaliada em duas partes. Por conveniência, podemos usar $a = 0$:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx + \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

O primeiro termo já foi avaliado no Exemplo 2. De maneira semelhante, pode-se avaliar o segundo termo fazendo-se a substituição $u = 1 + x^2$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2u^2}du = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2u}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Exemplo 7: Determine a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

Considerando $a = 0$, esta integral pode ser dividida em duas partes da forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

Avaliando o primeiro termo:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \lim_{b \to -\infty} \arctan(x) \Big|_{t}^{0}$$

Considerando que a função tangente está limitada entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ e que $\arctan(0) = 0$, temos que:

$$\lim_{b \to -\infty} \arctan(x) \Big|_{b}^{0} = \lim_{b \to -\infty} \arctan(b) = -\frac{\pi}{2}$$

Da mesma forma, a segunda integral pode ser avaliada como:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \lim_{b \to \infty} \arctan(x) \Big|_{0}^{b} = \lim_{b \to \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$$

Assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Obs.: Como a função tangente é periódica, de forma alternativa poderia-se utilizar outros argumentos, como por exemplo $\tan(\pi) = 0$, sendo neste caso a função definida entre $\pi/2$ e $3\pi/2$. O valor da integral, no entanto, não seria afetado.

A.3. Intervalos de integração contendo descontinuidades

O segundo caso de integrais impróprias ocorre quando existe uma descontinuidade infinita no intervalo de integração, por exemplo:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$$

Neste caso, a função não é definida em $x = 0$. De maneira semelhante ao empregado para as integrais com limites infinitos, a integral imprópria de uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ a não ser por uma descontinuidade em $x = b$ pode ser avaliada como:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x) dx$$

De forma semelhante, caso a descontinuidade for em $x = a$, a integral é avaliada como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Caso a descontinuidade infinita ocorrer para um ponto $x = c$ dentro do intervalo $[a, b]$ $(a < c < b)$, deve-se separar a integral em duas partes a avaliar o limite em cada uma delas:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$$

Exemplo 8: Avalie a integral imprópria:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Esta integral é imprópria devido a descontinuidade observada em $x = 1$. Avaliando o limite:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

A integral pode ser resolvida através de uma substituição do tipo $u = 1 - x$, de modo que $du = -dx$. Os limites passam a ser avaliados entre $u = 1$ e $u = 0 + \epsilon$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_1^{0+\epsilon} -\frac{du}{\sqrt{u}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_1^{0+\epsilon} -u^{-1/2}du = \lim_{\epsilon \to 0} \left(-2\sqrt{u} \Big|_1^{0+\epsilon} \right) =$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(-2\sqrt{0+\epsilon} + 2\sqrt{1} \right) = 2$$

Exemplo 09: Avalie a integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$$

Esta integral possui uma descontinuidade infinita em $x = 0$, sendo por isso imprópria. Fazendo $c = 0$, podemos avaliar os limites como:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{x^2}dx \right) =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\epsilon} - \frac{1}{x}\Big|_{\epsilon}^{1} \right) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 - 1 + \frac{1}{\epsilon} \right) = \infty$$

Portanto, a integral diverge. Observe que, caso a presença da descontinuidade fosse desconsiderada, a integral seria avaliada como:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

Considerando que a função $f(x) = 1/x^2$ é positiva para qualquer valor de x, este resultado não possui sentido algum.

Exemplo 10: Avalie a integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$$

Esta integral possui uma descontinuidade em $x = 1$, portanto deve ser avaliada em termos dos limites:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$$

Para resolver as integrais, pode-se fazer a substituição $u = x - 1$, de modo que $du = dx$. Com isso, os limites de integração passam a ser avaliados entre $u = -1$ e $u = 1$, com a descontinuidade aparecendo em $x = 0$:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{1}{u^{2/3}} du + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{0+\epsilon}^{1} \frac{1}{u^{2/3}} du = \lim_{\epsilon \to 0}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} 3u^{1/3} \Big|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0} 3u^{1/3} \Big|_{\epsilon}^{1} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(-3\epsilon^{1/3} + 3 + 3 - 3\epsilon^{1/3} \right) = 6$$

A.4. Teste de Comparação

Em determinadas situações não é possível determinar o valor exato de uma integral imprópria, mas ainda assim é possível saber se ela é convergente ou divergente por comparação com integrais conhecidas.

Teorema: Considere duas funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$:
Se $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)dx$ também é convergente;
Se $\int_a^\infty g(x)dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ também é divergente.

Exemplo 11: Mostre que $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ é convergente.

Para $x > 1$, temos que $x^2 > x$, desse modo $e^{-x^2} < e^{-x}$. Como visto anteriormente, a integral

$$\int_1^\infty e^{-x} dx$$

é convergente. Logo, pelo teorema apresentado anteriormente, a integral de e^{-x^2} também converge.

Exemplo 12: Determine para quais valores de s a integral a seguir converge e obtenha uma expressão para o valor da integral em função de s (Considere a como uma constante):

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin{(at)}dt$$

A integral pode ser determinada em termos do limite:

$$F(s) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\sin{(at)}dt$$

Esta integral pode ser avaliada por partes, fazendo:

$$u' = e^{-st} \qquad \to \qquad u = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$v = \sin(at) \qquad \to \qquad v' = a\cos(at)$$

Substituindo na integração por partes:

$$F(s) = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}\sin(at)\Big|_0^b - \int_0^b a\cos(at)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt\right)$$

ou ainda:

$$F(s) = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}\sin(at)\Big|_0^b + \frac{a}{s}\int_0^b e^{-st}\cos(at)dt\right)$$

Pode-se avaliar os limites do primeiro termo:

$$\lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}\sin(at)\Big|_0^b\right)$$

Para que a integral acima seja convergente, é necessário que o termo e^{-sb} diminua conforme $b \to \infty$, o que ocorre desde que $s > 0$. Considerando isto e também que $\sin(0) = 0$, o limite acima resulta em $0 - 0$.

A integral na equação anterior também pode ser resolvida por partes. Assim:

$$u' = e^{-st} \qquad \to \qquad u = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$v = \cos(at) \qquad \to \qquad v' = -a\sin(at)$$

Assim:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-st}\cos(at)dt\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cos(at)\Big|_0^b - \int_0^b \frac{1}{s}e^{-st}a\sin(at)dt\right)$$

Substituindo na expressão anterior:

$$F(s) = \frac{a}{s}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cos(at)\Big|_0^b\right) - \frac{a^2}{s}\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-st}\sin(at)dt\right)$$

Pode-se observar que a integral no lado direito corresponder exatamente à definição de $F(s)$. Assim, pode-se reescrever a equação anterior como:

$$F(s) = -\frac{a}{s^2} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-st} \cos(at) \Big|_0^b \right) - \frac{a^2}{s^2} F(s)$$

Avaliando os limites do primeiro termo (considerando $s > 0$):

$$-\frac{a}{s^2} \lim_{b\to\infty} e^{-st} \cos(at) \Big|_0^b = -\frac{a}{s^2}(0-1) = \frac{a}{s^2}$$

Assim:

$$F(s) + \frac{a^2}{s^2} F(s) = \frac{a}{s^2} \qquad \rightarrow \qquad \left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) F(s) = \frac{a}{s^2}$$

o que pode ser escrito como:

$$\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) F(s) = \frac{a}{s^2} \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{s^2}{(s^2+a^2)} \frac{a}{s^2}$$

de modo que:

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

13) A velocidade média das moléculas em um gás ideal é dada por

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT))} dv$$

onde M é o peso molecular do gás, R a constante dos gases ideais, T a temperatura e v a velocidade molecular. Mostre que:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Para facilitar a resolução, pode-se definir $\delta = \frac{M}{2RT}$:

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \delta^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\delta v^2} dv$$

Devido aos limites de integração, a integral é imprópria. Avaliando o limite:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b v^3 e^{-\delta v^2} dv$$

Para resolver a integral, pode-se realizar a substituição $v^2 = u$, de modo que $du = 2vdv$. Os limites de integração passam a ser avaliados entre $u = 0$ e $u = b^2$. Assim:

$$\int_0^b v^3 e^{-\delta v^2} dv = \int_0^b v^2 e^{-\delta v^2} v dv = \int_0^{b^2} u e^{-\delta u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^{b^2} u e^{-\delta u} du$$

Esta integral pode ser resolvida por partes, fazendo:

$$f = u \qquad \rightarrow \qquad df = du$$

$$g' = e^{-\delta u} \qquad \rightarrow \qquad g = -\frac{e^{-\delta u}}{\delta}$$

A integral por partes é avaliada como:

$$fg' = fg - \int f'g \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}\int_0^{b^2} ue^{-\delta u}du = \frac{1}{2}\left(-\frac{ue^{-\delta u}}{\delta}\bigg|_0^{b^2} - \int_0^{b^2} -\frac{e^{-\delta u}}{\delta}du\right)$$

Resolvendo a integral:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{ue^{-\delta u}}{\delta}\bigg|_0^{b^2} - \frac{1}{\delta^2}e^{-\delta u}\bigg|_0^{b^2}\right)$$

Substituindo no limite:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{ue^{-\delta u}}{\delta}\bigg|_0^{b^2} - \frac{1}{\delta^2}e^{-\delta u}\bigg|_0^{b^2}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\delta}\left(b^2e^{-\delta b^2}\right) - \frac{1}{\delta^2}(e^{-\delta b^2} - e^0)\right)$$

Como $\delta > 0$, os termos $e^{-\delta b^2}$ tendem a zero conforme $b \to \infty$. Como visto em exemplos anteriores, a indeterminação $b^2e^{-\delta b^2}$ pode ser resolvida por L'Hôspital e tende a zero. Assim:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b v^3e^{-\delta v^2}dv = \frac{1}{2\delta^2}$$

Substituindo na expressão para a velocidade média:

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\delta^{3/2}\int_0^\infty v^3e^{-\delta v^2}dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\delta^{3/2}\frac{1}{2\delta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\delta}} = \sqrt{\frac{4}{\pi\delta}}$$

Substituindo a definição utilizada para $\delta = \frac{M}{2RT}$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Lista de Exercícios: Integrais Impróprias

1) Obtenha (quando possível) o valor das seguintes integrais:

a)
$$\int_0^\infty e^{-x}dx$$

b)
$$\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3+1}dx$$

c)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

d)
$$\int_{-1}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$$

e)
$$\int_{-\infty}^\infty (2-x^4)dx$$

f)
$$\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}dx$$

g)
$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

h)
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$$

i)
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

j)
$$\int_{-\infty}^3 \frac{1}{x^2+9}dx$$

k)
$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

l)
$$\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$

m)
$$\int_{-1}^0 \frac{e^x}{e^x-1}dx$$

2) Determine para quais valores de s as integrais a seguir convergem e obtenha uma expressão para o valor da integral em função de s:

a)
$$\int_0^\infty e^{-(s+5)x}dx$$

b)
$$\int_0^\infty e^{-sx}x^2dx$$

c)
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^s}dx$$

d)
$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s}dx$$

3) Mostre que:
$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt=\frac{s}{s^2+a^2}$$
onde a é uma constante.

4) A massa de uma substância radioativa decaí exponencialmente com o tempo, da forma $m(t) = m_0 e^{kt}$, onde $m(t)$ é a massa no instante t, m_0 a massa inicial e k uma constante negativa. A vida-média (M) de um átomo neste material é dada por:

$$M = -k \int_0^{\infty} te^{kt} dt$$

No caso do isótopo Carbono-14 (usado em datação), o valor de k é -0,000121 $anos^{-1}$. Calcule a vida-média de um átomo de C^{14}.

R: $M = 8264.5$ anos

5) A Lei de Newton da Gravitação Universal implica que o trabalho necessário para deslocar um corpo de massa m sob ação do campo gravitacional da Terra de um ponto $r = a$ até um ponto $r = b > a$ é dado por:

$$W = \int_a^b \frac{mM_T G}{r^2} dr$$

onde M_T é a massa da Terra ($\approx 5.98 \times 10^{24}\, kg$) e G é a constante gravitacional ($= 6,67 \times 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$). Determine o trabalho necessário para lançar um satélite de massa 1,000 kg da superfície terrestre ($a = R = 6.37 \times 10^6\, m$) para fora do campo gravitacional ($b \to \infty$).

R: $W \approx 6.26 \times 10^{10}\, Nm$

6) Para que um objeto de massa m possa deixar o campo gravitacional de um planeta de massa M, é necessário que este seja lançado a uma velocidade superior à velocidade de escape, v_0. Esta velocidade é determinada de modo que a energia cinética $mv_0^2/2$ seja superior ao trabalho necessário para lançar o objeto. Com base na Lei de Newton da Gravitação Universal (apresentada no exercício anterior), determine a velocidade de escape necessária para lançar este objeto da superfície do planeta ($a = R$) para fora do campo gravitacional ($b \to \infty$).

R: $v_0 = \sqrt{2GM/R}$

7) Uma função de densidade de probabilidade $f(x)$ é definida de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

A probabilidade de um determinado valor x estar dentro de um intervalo $a \geq x \geq b$ é dada por:

$$P(a \geq x \geq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Em uma fábrica de circuitos impressos, determinou-se que a vida útil destes circuitos segue uma função da forma $f(x) = ce^{-cx}$ para $x \geq 0$ (ou seja, $f(x) = 0$ para $x < 0$), onde x é dado em horas e c é uma constante.

a) Para quais valores de c a função $f(x)$ define uma função de densidade de probabilidade?

b) Considerando $c = 0.002\, h^{-1}$, qual é a probabilidade dos circuitos possuírem uma vita útil inferior a 1000 horas?

B. Introdução ao Wolfram Mathematica

O material a seguir apresenta uma introdução aos comandos básicos utilizados no software Mathematica. O texto foi elaborado no longínquo ano de 2010, portanto algumas funções podem ter sido alteradas nas versões mais atuais. Porém, de forma geral, a sintaxe utilizada continua a mesma, portanto o material ainda é útil como guia para um contato inicial com o programa.

Nos últimos anos a Wolfram tem mantido um programa chamado *Wolfram Programming Lab*, que disponibiliza acesso às funcionalidades do Mathematica sem ser necessário instalar o software. Este programa está disponível online no endereço:

https://lab.open.wolframcloud.com/app/

Acessando a função *Create a New Notebook* será criado um notebook onde é possível utilizar a ferramenta.

B.1. Uma Visão Geral Sobre o Programa

A primeira característica marcante sobre a estrutura do Mathematica é o fato de ele ser um programa do tipo CAS (*Computer Algebra System*). A grande vantagem desta classe de softwares é a possibilidade de operações simbólicas, ou seja, permite a manipulação de equações matemáticas expressas na forma de símbolos. Este tipo de estrutura é bastante diferente da aproximação numérica realizada pela maioria dos programas na área das engenharias. Outros exemplos de softwares CAS são o MathCad, Maple, Cadabra (para Linux) e SAGE (Open Source e com licença livre).

B.1.1. Comandos Básicos

Para resolver uma operação matemática simples, basta digitar as expressões e em seguida usar o comando *Shift + Enter*. Este comando é utilizando sempre que se deseja resolver um conjunto de valores de entrada. Quando feito isto, o programa irá atribuir uma nomeação *In* para os dados de entrada e uma nomeação *Out* para os de saída.

```
In[6]:= (3 + 1) ^ 2 + Sqrt[16] * Sin[Pi / 2]

Out[6]= 20
```

Cada entrada pode ter uma ou mais saídas correspondentes (dependendo do número de expressões utilizadas).

Pode-se também alocar um valor para uma determinada variável:

```
In[7]:=
        a = 45
        b = a - 10
        c = A - 10

Out[7]= 45

Out[8]= 35

Out[9]= -10 + A
```

Percebe-se que o Mathematica é um software *case sensitive*, ou seja, existe uma diferenciação entre maiúsculas e minúsculas ($a \neq A$). Este detalhe é muito importante quando forem definidas as funções, pois isto costuma ser fonte de muitos erros.

Sempre que possível, o resultado será expresso em sua forma mais simples, o que fica bem evidente quando se opera com frações. Por exemplo:

```
In[10]:=
        21 / 28
```

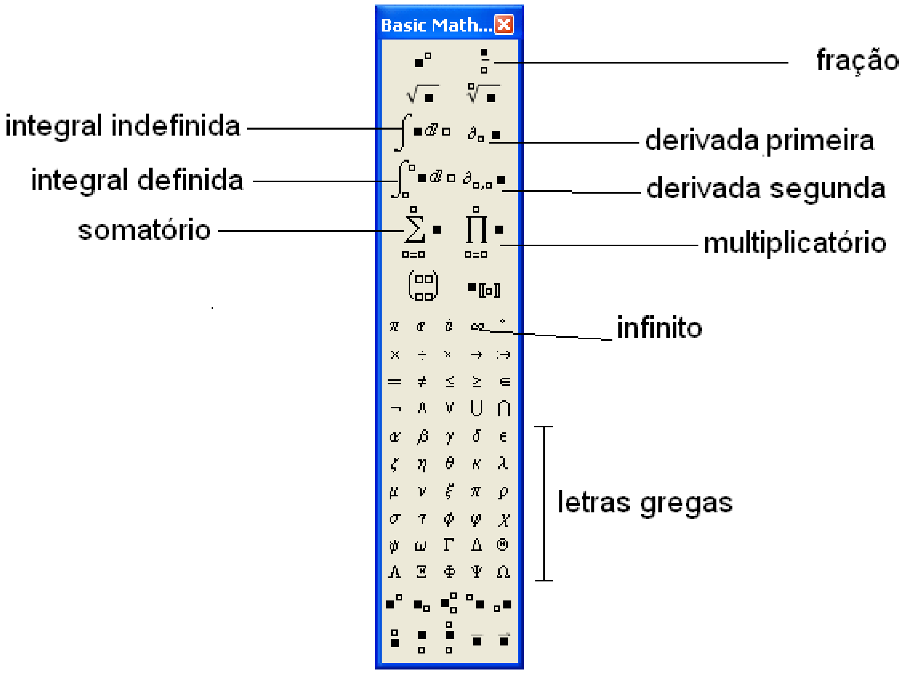
Out[10]= $\frac{3}{4}$

Caso queira-se obter o resultado numérico, basta "forçar" o programa para retornar neste formato, através do comando *N[ ]*:

```
In[11]:=
        N[21 / 28]

Out[11]= 0.75
```

Dica de Sobrevivência: *Por padrão o Mathematica aloca o valor da última saída na variável genérica %. Porém, é sempre aconselhável dar nome às variáveis, pois isto pode evitar muitas confusões...*

Uma função muito útil do programa, especialmente quando não se tem muito conhecimento sobre os comandos básicos, são as *Palettes*, especialmente a *BasicMathInput*[1]:



Exemplos de uso:

```
In[22]:=
        ∂x (x^2 + y^2)
Out[22]= 2 x
```

```
In[23]:=
        ∂x,x (x^2 + y^2)
Out[23]= 2
```

```
In[24]:=
        ∂x,y (x^2 + y^2)
Out[24]= 0
```

B.1.2. O Básico Sobre Comandos

Através de comandos específicos pode-se solicitar que o programa execute determinadas ações. Um comando normalmente possui a seguinte forma:

Comando1[{argumento1},{argumento2}]

[1] Nas versões atuais, também chamada de *Basic Math Assistant*.

onde o número de argumentos é variável, dependendo do comando.

Existem algumas regras que devem ser seguidas na entrada de comandos, dentre as quais pode-se destacar:

1. Os argumentos devem ser inseridos entre colchetes;

2. Caso houver mais de um argumento, estes devem ser separados por vírgula;

3. Todos os comandos começam com letra maiúscula. Comandos compostos por mais de uma palavra devem possuir letra maiúscula no começo de cada palavra, como por exemplo: *ExpToTrig, ArcSin, NSolve, etc.*

Um detalhe importante a ser observado é quanto à coloração da fonte. Quando o comando começa a ser digitado, a cor atribuída será azul. Assim que o conjunto de caracteres adquirir a forma de um comando conhecido, a sua coloração será preta.

Existem centenas de comandos que podem ser utilizados, de modo que torna-se inviável discutir sobre todos eles. A seguir serão apresentados alguns comandos básicos de grande utilidade.

Aproximação Numérica

Conforme mostrado anteriormente, o comando N[ ] pode ser utilizado para encontrar uma aproximação numérica para uma determinada função. Por exemplo:

```
In[26]:=
    N[Pi, 300]
Out[26]= 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844\
    446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091\
    14564856692346034861045432664821339360726024914127
```

Neste comando, o segundo argumento refere-se a quantidade de casas decimais desejada.

Logaritmos

A função Log[x] retorna o logaritmo natural de x. Para obter o logaritmo em outra base, utiliza-se a função como Log[b,x], onde b é a base desejada. Por exemplo:

```
In[38]:=

Log[E]
Log[10, 0.1]

Out[38]= 1

Out[39]= -1.
```

B.1.3. Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas são acessadas pelos seus nomes usuais, por exemplo Sin, Cos, Tan, Cot, ArcSin, etc. O único cuidado a ser tomado é utilizar o argumento das funções em radianos. Por exemplo:

```
In[50]:=
Cos[Pi]
N[Cos[180]]

Out[50]= -1

Out[51]= -0.59846
```

Na próxima seção será tratado sobre a definição e manipulação de funções matemáticas, sendo que muitos outros comandos serão apresentados ao longo do desenvolvimento do nosso estudo.

B.1.4. Exercícios Propostos I

Resolva as seguintes expressões:

1) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \cos(2\pi - 1)\right)$

2) $a = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4^{2m+2}}{2^{2m+2} m!(2+m)!}$

3) $f = \int_0^y (y^2 + 3xy + 3)dy$

4) $b = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}$

B.2. Construindo e Visualizando Funções

O Mathematica possibilita a definição de funções arbitrárias. O contexto de função utilizado pelo programa é o mesmo utilizado na matemática clássica, ou seja, a função é um meio de relacionar um domínio com uma respectiva imagem. A definição de uma função do tipo *f(x)=a* é dada da seguinte forma:

$$f[x\_] := a$$

Por exemplo, considere a seguinte função quadrática:

```
In[5]:=
        f[x_] := x^2 + 2 * x + 1
In[6]:= y = f[2]
Out[6]= 9
```

Percebe-se que a definição da função não gera uma saída. A saída só é gerada quando define-se o argumento da função.

De maneira semelhante, pode-se definir funções de várias variáveis separando-se as variáveis por uma vírgula. Por exemplo:

```
In[15]:=
        g[y_, z_] := y^2 + z^2 + y * z
        g[4, z]
        g[4, 4]
Out[16]= 16 + 4 z + z^2
Out[17]= 48
```

Assim como para a definição dos comandos, algumas regras básicas precisam ser respeitadas na definição das funções. As principais são:

1. O argumento da função deve ser definido entre colchetes;
2. O(s) argumento(s) da função devem ser seguidos por um *underline* _;
3. A definição da função deve ser antecedida por := (símbolo chamado de SetDelayed). Isto faz com que a definição seja alocada para a função definida, o que é diferente de uma simples igualdade. Em algumas linguagens de programação, o símbolo := significa "recebe". Assim, a função *f[x_]* recebe um determinado valor, o que é diferente de afirmar que *f[x_]* é igual a determinado valor.

Dica de Sobrevivência II: *É aconselhável que o nome da função definida comece com letra minúscula, para diferenciar das funções (comandos) padrão inseridos no código do programa.*

A esta altura, cabe um comentário adicional:

Comentário Adicional: *Existe uma diferenciação clara entre parênteses, colchetes e chaves na sintaxe do programa. Os parênteses são utilizados somente para agrupar termos em uma expressão matemática (Ex:* $(x+y)^2$*), os colchetes são usados para delimitar os argumentos de uma função ou comando (Ex:* $Sin[\pi]$*) e as chaves possuem a importante função de definir listas (Ex: N[{Pi, E},30])*

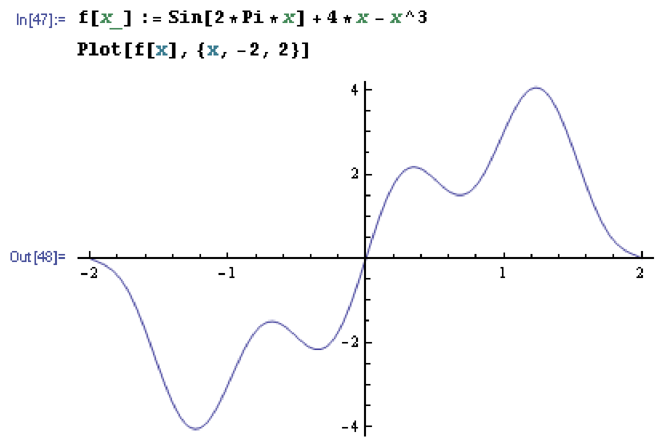
B.2.1. Visualização Gráfica de Funções

O comando básico para a visualização de gráficos 2D é o comando Plot. A sua sintaxe é feita da seguinte forma:

$$\text{Plot}[f[x], \{x, x_{min}, x_{max}\}]$$

onde o termo entre chaves define qual a variável utilizada para o eixo x e quais os limites desta variáveis utilizados na construção do gráfico.

Por exemplo:



O comando Plot pode ser utilizado também para a construção de gráficos com mais de uma função. Exemplo:

Onde a função $LegendreP[n, x]$ é uma função especial, que representa o polinômio de Legendre de ordem n. Mais detalhes sobre funções especiais serão abordados ao longo do curso.

A função Plot é bastante útil para a visualização de gráficos simples, porém não permite a visualização de funções de mais de uma variável. Para suprir esta necessidade, existem dois tipos de gráficos bastante utilizados, os gráficos de contorno e os gráficos 3D.

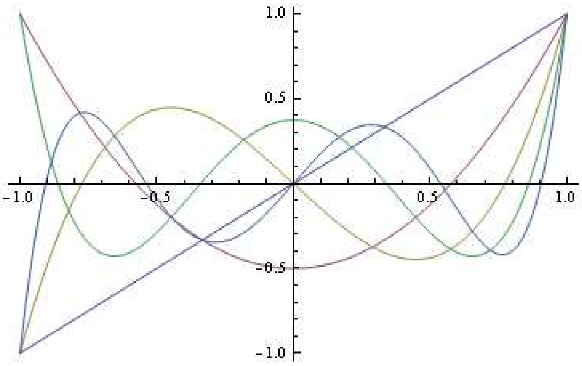
Os gráficos de contorno são acessados pelo comando CountourPlot, sendo definido como:

$$\text{ContourPlot}[f[x,y], \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}]$$

In[54]:=

```
Plot[{LegendreP[1, x], LegendreP[2, x], LegendreP[3, x], LegendreP[4, x], LegendreP[5, x]}, {x, -1, 1}]
```

Out[54]=

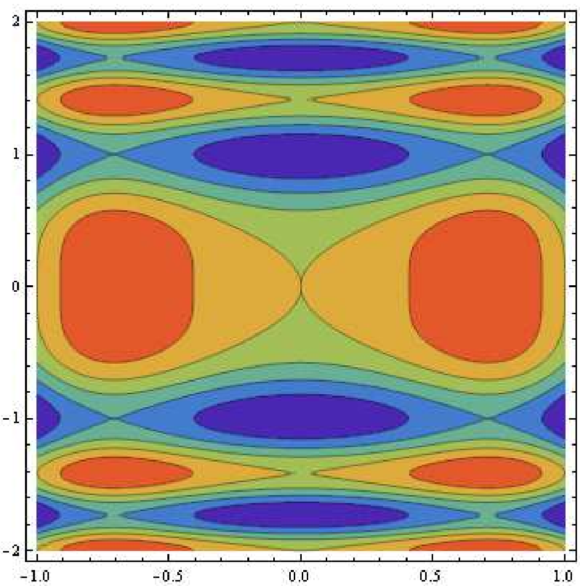


Por exemplo:

In[97]:=

```
ContourPlot[{Sin[Pi*x^2] + Cos[Pi*y^2]}, {x, -1, 1}, {y, -2, 2}, ColorFunction → "Rainbow"]
```

Out[97]=



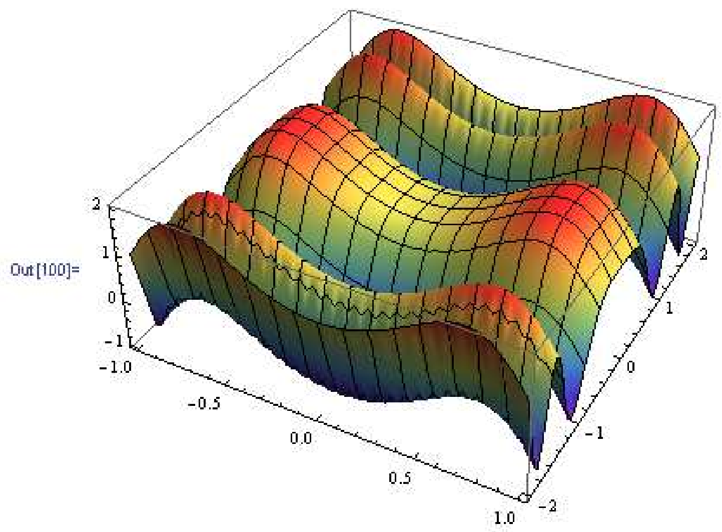
Pode-se notar que na definição deste gráfico, um quarto parâmetro é utilizado (ColorFunction). Esta função representa uma opção do gráfico, no caso, utilizada para modificar o esquema de cores. Existem muitas outras funções que podem ser inseridas de maneira semelhante, sendo que não será abordado sobre todas estas funções secundárias neste curso introdutório.

O comando Plot3D permite a visualização de gráficos em 3D, sendo um comando bastante utilizado no Mathematica. A sua forma geral é:

$$\text{Plot3D}[f[x,y],\{x,x_{min},x_{max}\},\{y,y_{min},y_{max}\}]$$

Por exemplo, a mesma função do exemplo anterior, plotada em 3D resulta em:

```
In[100]:=
Plot3D[{Sin[Pi*x^2] + Cos[Pi*y^2]}, {x, -1, 1}, {y, -2, 2}, ColorFunction → "Rainbow"]
```



Outra função bastante interessante na visualização de gráficos de mais de uma variável é a função Manipulate. Esta função permite a criação de uma barra de rolagem onde o valor de uma variável pode ser alterado interativamente pelo usuário. A forma básica deste comando é bastante simples:

$$\text{Manipulate}[Expr,\{Var,min,max,passo\}]$$

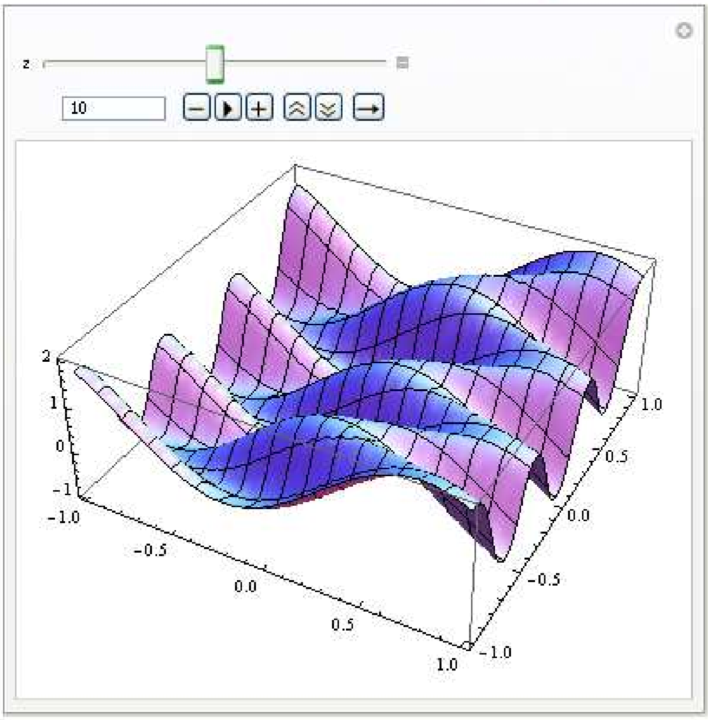
onde Expr é a expressão a ser avaliada, Var a variável manipulada, min e max os valores inicial e final da barra de rolagem e o passo representa o passo de avanço da variável (este parâmetro é optativo). Um exemplo do uso desta função é mostrado na página seguinte.

Com o conjunto de funções apresentadas até agora, é possível visualizar a grande maioria das funções de interesse. Porém, existem muitos outros tipos de gráficos disponíveis no Mathematica, como por exemplo gráficos de densidade, de vetores, de linhas de superfície, etc.

In[117]:=

```
Manipulate[Plot3D[x^2 + Sin[Pi * y + Cos[x * z]], {y, -1, 1}, {x, -1, 1}], {z, 0, 20, 0.5}]
```

Out[117]=



B.2.2. Exercícios Propostos II

Defina e grafique as seguintes funções:

1) $f(x) = \dfrac{\ln(2+x)}{x+3}$ 2) $f(x,y) = \exp(-(x^2+y^2))$

3) As funções de Laguerre (LaguerreL[n,x]) de ordem par (2 a 10), no intervalo de $0 \leq x \leq 6$.

4) $f(x) = \sin(x+y)^2 \times \cos(x-y)^2$, nos intervalos de $-\pi \leq x \leq \pi$ e $-\pi \leq y \leq \pi$. Utilize as funções Plot3D e ContourPlot.

Comentário Adicional II: *Quando uma função ou variável é definida, um determinado valor ou função é alocado para o símbolo utilizado. Por isso, muitas vezes torna-se necessário limpar o valor de um determinado símbolo. Isto pode ser feito através do comando Clear[f], onde f é a variável ou função a ser "limpa". Um comando bastante útil é o Clear["Global `*"], que limpa o valor de todas as variáveis e funções.*

B.3. Manipulação Algébrica

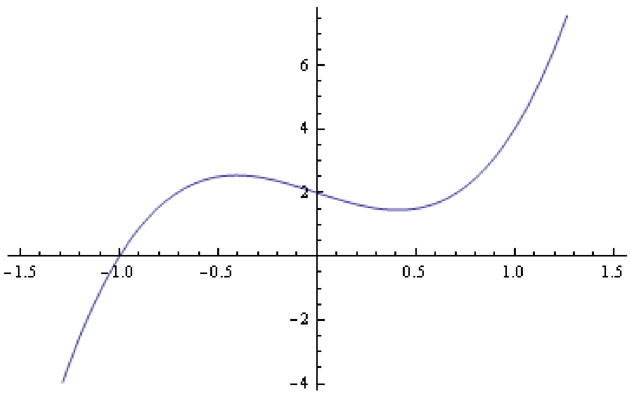
O Mathematica possui uma extensa função nas mais diversas áreas da algebra. Nesta seção iremos focar na resolução de equações (em especial envolvendo funções trigonométricas e polinomiais).

B.3.1. Fatorando e Expandindo Polinômios

Quando se opera com polinômios, muitas vezes é necessário fatorá-los em diversos termos ou unir diversos termos em um único polinômio. No Mathematica, estas operações são facilmente realizadas através dos comandos Factor e Expand. Considere o exemplo a seguir

```
In[91]:= Clear[f, x];
         f[x_] := 4 x^3 - 2 x + 2
         Plot[f[x], {x, -1.5, 1.5}]
         Factor[f[x]]
```

Out[93]=



Out[94]= $2\,(1+x)\,(1-2x+2x^2)$

```
In[95]:=
         Expand[2 (1 + x) (1 - 2 x + 2 x^2)]
```

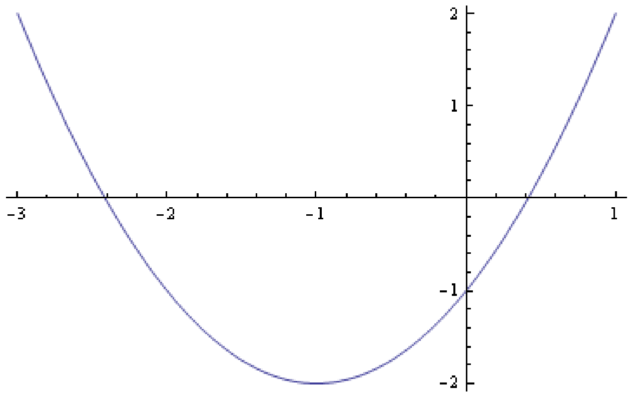
Out[95]= $2-2x+4x^3$

Muitas vezes (na verdade, a maioria delas), o comando Factor retorna somente a função original (sem fatorá-la). Isso ocorre pois este comando, a princípio, opera somente com a mesma classe de números definidos na função. Então, se a função for definida somente com coeficientes inteiros, e alguma das raízes for um número irracional (o que ocorre muito frequentemente) ou complexo, este fator será desconsiderado. Uma maneira muito simples de contornar este problema é representar algum dos coeficientes como um número real, como mostrado no exemplo a seguir. Este procedimento irá retornar as raízes aproximadas do polinômio.

In[114]:=

```
g[x_] := x^2 + 2*x - 1.0
Plot[g[x], {x, -3, 1}]
Factor[g[x]]
```

Out[115]=



Out[116]= 1. (-0.414214 + x) (2.41421 + x)

B.3.2. Encontrado Raízes com a Função FindRoot

A função FindRoot é uma função específica para a determinação de raízes de funções (de uma ou de um conjunto de funções). Esta função é basicamente expressa da seguinte forma:

$$\mathrm{FindRoot}[f, \{x, x_0\}]$$

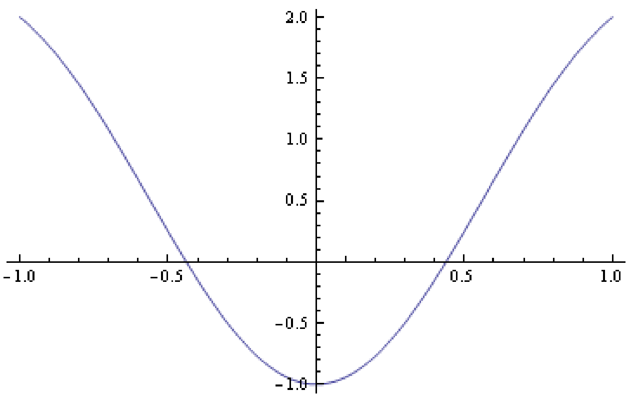
onde x_0 é o ponto inicial a partir do qual será buscada uma raíz. Esta função utiliza o método de Newton-Raphson para encontrar a raíz, daí então a necessidade de um "chute inicial". Observe o exemplo:

```
Clear[f, x]
```

In[136]:=

```
f[x_] := x^2 - Cos[Pi*x]
Plot[f[x], {x, -1, 1}]
FindRoot[f[x], {x, 0}]
```

Out[137]=



FindRoot::jsing : Encountered a singular Jacobian at the point {x} = {0.}. Try perturbing the initial point(s). ≫

Out[138]= {x → 0.}

Como pode ser visto pelo gráfico, a função possuir claramente duas raízes (próximas a

-0.5 e 0.5). Porém, a função FindRoot não foi capaz de encontrar estas raízes a partir do chute inicial dado (x=0). Porém, uma mensagem de erro foi retorna, indicando que um ponto Jacobiano singular foi encontrado no ponto x=0. Como o método de Newton-Raphson utiliza o Jacobiano para encontrar a raíz, pode ocorrer divergência em alguns casos. A solução mais simples nestes casos é a sugerida pelo programa, ou seja, alterar o valor inicial. O resultado pode ser visto a seguir:

```
In[117]:=
        Clear[f, x]

In[144]:= f[x_] := x^2 - Cos[Pi * x]
          FindRoot[f[x], {x, 0.1}]
          FindRoot[f[x], {x, 0, -1}]

Out[145]= {x → 0.438431}

Out[146]= {x → -0.438431}
```

O comando FindRoot também pode ser utilizado para buscar uma solução numérica para uma determinada equação. Para tal, deve-se utilizar o símbolo == para igualar as funções. Veja o exemplo a seguir:

```
In[157]:=

        FindRoot[E^(x + 1) == Cos[x], {x, 0}]
Out[157]= {x → -4.73623}
```

Cabe ressaltar novamente que o símbolo == (igual) deve ser utilizado. Este símbolo expressa a igualdade entre os dois termos, e possui um significado bastante distinto do símbolo =, que é utilizado para *definir* um certo termo. Veja por exemplo o que ocorre caso o símbolo = for utilizado:

```
In[158]:=

        FindRoot[E^(x + 1) = Cos[x], {x, 0}]
        Set::write : Tag Power in e^(1+x) is Protected. >>
Out[158]= {x → 0.}
```

O programa retorna uma mensagem de erro dizendo que a expressão e^{1+x} é protegida, ou seja, ela já possui um significado. Isto ocorre pois a expressão escrita desta forma esta dizendo para o programa atribuir o valor de $\cos x$ para uma variável escrita como e^{1+x}.

B.3.3. Exercícios Propostos III

1) Encontre as raízes da função $f(x) = 10x^4 + 2x^3 + 5x + 1$ através de:

a) visualizando o gráfico da função (valores aproximados para as raízes reais);

b) fatorando a função;

c) através do comando FindRoot.

B.3.4. Resolvendo Equações com os Comandos Solve e NSolve

Os comandos Solve e NSolve (Numerical Solve) são muito utilizados para a resolução de equações, quando busca-se determinar um valor (ou expressão) para determinada variável. São bastante semelhantes ao comando FindRoot, porém são mais abrangentes. Estes comandos são expressos por:

$$\text{Solve}[eq1 == eq2, var]$$

onde var é a variável a ser encontrada. O comando NSolve é utilizado da mesma forma, sendo que a diferença entre eles é que o comando Solve busca uma solução algébrica, enquanto que o NSolve busca uma solução numérica. Por exemplo:

```
In[180]:=
     Clear[f, x]

In[195]:=
     f[x_] = a*x^2 + b*x + c
     Solve[f[x] == 0, x]
     NSolve[f[x] == 0, x]
```

Out[195]= $c + b\,x + a\,x^2$

Out[196]= $\left\{\left\{x \to \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right\}, \left\{x \to \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right\}\right\}$

Out[197]= $\left\{\left\{x \to \frac{0.5\left(-1.\,b - 1.\sqrt{b^2 - 4.\,a\,c}\right)}{a}\right\}, \left\{x \to \frac{0.5\left(-1.\,b + \sqrt{b^2 - 4.\,a\,c}\right)}{a}\right\}\right\}$

Estas funções também podem ser utilizadas para encontrar mais de uma variável, como mostrado no exemplo a seguir.

Como pode ser visto, a resposta é dada em função de uma relação entre as variáveis. Assim, no primeiro caso, a igualdade será satisfeita quando $x \to |y|$

Alguns comentários podem ser feitos a respeito a respeito da utilização destas funções:

1. A igualdade das funções deve ser definida com ==;

In[208]:=

```
g[x_, y_] := x^2 - y^2
Solve[g[x, y] == 0, x, y]
```

Out[209]= {{x → -y}, {x → y}}

In[210]:=

```
Solve[g[x, y] == f[x], x]
```

Out[210]= $\left\{\left\{x \to \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c - 4ac + 4y^2 - 4ay^2}}{2(-1+a)}\right\}, \left\{x \to \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c - 4ac + 4y^2 - 4ay^2}}{2(-1+a)}\right\}\right\}$

2. Quando não existir solução para as equações, a função Solve retorna o símbolo { };

3. Quando as variáveis podem assumir qualquer valor, a função Solve retorna o símbolo { { } };

4. A função NSolve[f[x],x] retorna o mesmo valor de N[Solve[f[x],x]].

B.3.5. Resolvendo Sistemas de Equações

Os comandos Solve e NSOlve podem ser utilizados também para a resolução de sistemas de equações. Para tanto, pode-se utilizar uma lista de expressões associadas a uma lista de variáveis a serem encontradas. Vale lembrar que a inserção de listas é feita através do uso de { }. A expressão geral para a solução de um sistema de duas equações (que pode ser extendido para quantas equações forem necessárias) é da forma:

$$\text{Solve}[\{exp1, exp2\}, \{var1, var2\}]$$

Por exemplo, um sistema de três equações lineares pode ser facilmente resolvido:

In[3]:=

```
Solve[{2 x + 3 y + z == 0, 4 y + 4 x - 2 z == 0, x + y + z == 1}, {x, y, z}]
```

Out[3]= $\left\{\left\{x \to \frac{5}{3}, y \to -\frac{4}{3}, z \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$

Este método pode ser utilizado também para a resolução de sistemas não-lineares. Porém, deve-se sempre estar atento para o fato de que alguns sistemas não podem ser resolvidos algebricamente. Considere o exemplo:

Este sistema de equações não pode ser resolvido algebricamente (conforme indicado pela mensagem de erro), pois contém a expressão transcendental $\sin(x) = -\ln(\sqrt{1/x})$. Para

```
In[8]:=

    Solve[{Sin[x] + Log[y] == 0, x * y^2 == 1}, {x, y}]

    Solve::tdep : The equations appear to involve the variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. >>

Out[8]= Solve[{Log[y] + Sin[x] == 0, x y^2 == 1}, {x, y}]
```

resolver este tipo de problema, pode-se recorrer a uma aproximação numérica, tal como a função FindRoot:

```
In[28]:=
    y = Sqrt[1 / x]
    FindRoot[{Sin[x] + Log[y] == 0}, {x, 0.1}]

Out[28]= Sqrt[1/x]

Out[29]= {x -> 2.63571}
```

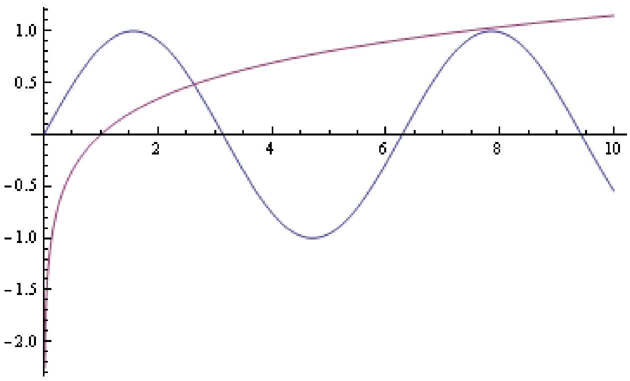
Porém, como se trata de uma função transcendental, podem existir outros valores de x (neste caso, outros autovalores) que satisfaçam a igualdade. Quando se avalia a função em um intervalo mais amplo, obtém-se o seguinte resultado:

```
In[74]:=
    y = Sqrt[1 / x]
    FindRoot[{(Sin[x] + Log[y]) == 0}, {x, 0.1}]
    FindRoot[{(Sin[x] + Log[y]) == 0}, {x, 6}]
    Plot[{Sin[x], -Log[Sqrt[1 / x]]}, {x, 0, 10}]

Out[74]= Sqrt[1/x]

Out[75]= {x -> 2.63571}

    FindRoot::lstol :
     The line search decreased the step size to within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal
         but was unable to find a sufficient decrease in the merit function. You may need
         more than MachinePrecision digits of working precision to meet these tolerances. >>

Out[76]= {x -> 7.78975}
```

Avaliando o comportamento das duas funções envolvidas graficamente, obtém-se:

```
Plot[{Sin[x], -Log[Sqrt[1/x]]}, {x, 0, 10}]
```

Out[77]=



Avaliando uma raíz na região próxima a $x = 8$, o programa detectou que $x \approx 7.78975$ é uma solução para o sistema de equações. Porém, uma mensagem de erro foi emitida, informando que a raíz não obteve a tolerância especificada pelos parâmetros AccuracyGoal e PrecisionGoal. Estes parâmetros são utilizados para definir a precisão da aproximação numérica, representando o número de digitos efetivos de precisão que a resposta final deve ter.

Como pode ser visto pelo gráfico, as funções avaliadas possuem um valor muito próximo em $x \approx 7.78975$, porém, possivelmente, este valor não representa um autovalor algébrico (exato) para o sistema de equações. Porém, como a função FindRoot é uma *aproximação* numérica, foi detectado que este valor se aproxima muito de uma raíz. Caso o critério de convergência for diminuído, ele será tratado efetivamente como uma raíz, como pode ser visto a seguir:

```
In[134]:=
        y = Sqrt[1/x]
        FindRoot[{(Sin[x] + Log[y]) == 0}, {x, 0.1}]
        FindRoot[{(Sin[x] + Log[y]) == 0}, {x, 6}, AccuracyGoal → 1]
```

Out[134]= $\sqrt{\frac{1}{x}}$

Out[135]= {x → 2.63571}

Out[136]= {x → 7.78878}

B.3.6. Exercícios Propostos IV

Obtenha o valor de x nas seguintes equações:

1)$e^x = 0$ 2) $\dfrac{x^3 + 5x + 1}{x^2} = 0$ 3) $\tan(\pi x) = x$

Resolva os seguintes sistemas de equações:

4) $y = x^2$
$y = 4x^2 + 2x - 2$

5) $y = Sin[x] + Cos[y]$
$y^3 - 2xy + x = 0$

C. Resolução de ED's com o Mathematica

As equações diferenciais representam possivelmente a melhor ligação entre a matemática pura e a engenharia aplicada, desempenhando um papel fundamental em grande parte das ciências exatas. Existem inúmeros softwares destinados à resolução de equações diferenciais, desde programas simples com o objetivo de encontrar derivadas de funções comuns até complexos algorítmos destinados a resolver várias equações diferenciais parciais acopladas com o uso de técnicas numéricas. O Mathematica é um software muito versátil nesta área, pois permite a resolução de equações tanto de modo algébrico (analítico) quanto numérico. Neste trabalho, será apresentada uma visão geral sobre a resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais, através de métodos analíticos e numéricos.

C.1. Equações Diferenciais Ordinárias

As Equações Diferenciais Ordinária (EDO's) possuem um método de resolução bastante simplificado em relação às Equações Diferenciais Parciais (EDP's). Porém, a aplicação prática destas equações é mais restrita. O Mathematica possui em seu código fonte vários métodos de resolução de equações diferenciais, sendo que o programa selecionará automaticamente o método que melhor se enquadre na equação avaliada.

Antes de entrar especificamente no assunto de equações diferenciais, é importante apresentar a resolução do processo inverso, ou seja, de como calcular a derivada de funções. Isso é facilmente conseguido através do comando *Derivative*. Este comando pode ser acessado da seguinte forma:

$$\mathrm{D}[f(x), x]$$

onde $f(x)$ representa a função a ser derivada e x a variável na qual a função será derivada. Para resolver derivadas de ordens maiores, basta acrescentar as variáveis na qual a função será derivada. Por exemplo, para calcular a derivada segunda de $f(x)$ em relação a x, o comando toma a forma:

$$\mathrm{D}[f(x), x, x]$$

Veja o exemplo a seguir:

```
In[44]:= f[x_] := Cos[x] + (a * x^3) / 2
         D[f[x], x]
         D[f[x], x, x]

          3 a x²
Out[45]= ------ - Sin[x]
            2

Out[46]= 3 a x - Cos[x]
```

Muitas vezes, deseja-se encontrar o valor da derivada em um ponto específico. Para substituir o valor da variável por um valor qualquer, pode-se utilizar o comando *ReplaceAll* (/.). Este comando, como o nome sugere, substitui a variável por algum valor, ou alternativamente uma lista de valores. Veja o exemplo:

```
In[51]:=
         f[x_] := Cos[x] + (a * x^3) / 2
         D[f[x], x] /. x → {Pi / 2, b, 1}

                3 a π²   3 a b²             3 a
Out[52]= {-1 + ------, ------ - Sin[b], --- - Sin[1]}
                  8        2                 2
```

Alternativamente, a função Derivative para funções de uma única variável pode ser acessada pode sua forma mais clássica, através do uso das aspas simples. Assim:

$$\mathrm{D}[f(x), x] = f'[x]$$

$$\mathrm{D}[f(x), x, x] = f''[x]$$

$$\mathrm{D}[f(x), x]/.\ x \to a = f'[a]$$

C.1.1. EDO's com Solução Analítica

O comando básico para a solução analítica de equações diferenciais no Mathematica é o famoso *DSolve*, que pode ser utilizado tanto para EDO's quanto para EDP's. Este é, sem dúvidas, um dos comandos mais completos e poderosos do Mathematica. Porém, deve-se ter claro que este comando busca uma expressão simbólica (e não numérica) para a solução, sendo que, portanto, só pode ser aplicado a equações que possuam solução analítica. O comando DSolve requer, no mínimo, três argumentos, sendo que a sua forma padrão é:

$$\text{DSolve}[\text{eqDiff}, f[x], x]$$

onde eqDiff representa a equação diferencial a ser resolvida, $f(x)$ a função a ser encontrada e x a variável independente. Observe o simples exemplo abaixo:

```
In[261]:= DSolve[f'[x] == Sin[x] * f[x], f[x], x]
Out[261]= {{f[x] → e^(-Cos[x]) C[1]}}
```

Percebe-se que a solução fornecida possui uma constante C[1] em aberto, o que é normal levando-se em conta que nenhuma condição de contorno foi especificada. Certamente, na maioria dos casos deseja-se obter uma solução completa, sem nenhum parâmetro em aberto. O comando DSolve também tem a capacidade de resolver sistemas de equações diferenciais, portanto, as condições de contorno podem ser adicionadas como novas expressões, onde alguma das variáveis independentes é fixada. Considerando uma equação diferencial $f''(x) = 0$ qualquer, pode-se calcular a equação, especificando-se as condições de contorno, da seguinte forma:

$$\text{DSolve}[\{f''[x] == 0, f[x1] == a, f[x2] == b\}, f[x], x]$$

lembrando que o conjunto de expressões, ou seja, a equação diferencial mais as suas condições de contorno, formam uma lista, e como tal devem ser especificadas entre chaves.

No exemplo a seguir pode ser visto o uso do comando DSolve.

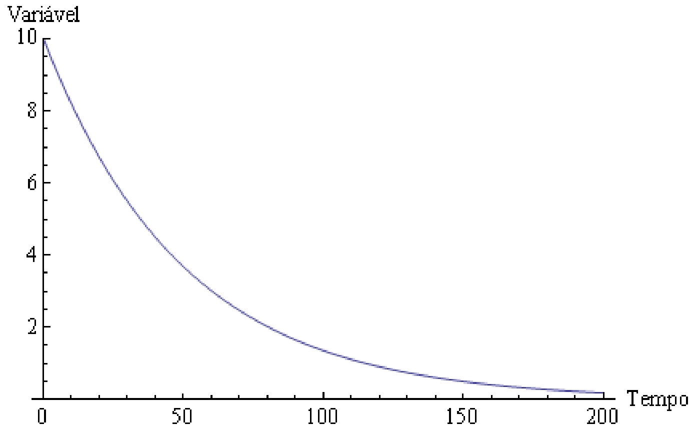
Exemplo 1 - Decaimento Exponencial. Obtenha a variação de uma variável qualquer que obedeça o modelo de decaimento exponencial, ou seja, $y'(t) = -ky(t)$, onde $k = 0.02$ e no instante 0 a variável $y(t) = 10$.

Caso a variável independente não for informada no segundo argumento da função DSolve, ou seja, na definição da função resultante, o programa retornará uma *função pura*, ou seja, que não está limitada a depender de alguma variável específica. Observe os dois casos mostrado no exemplo a seguir:

No primeiro caso, a solução é retornada como uma função de x e y, enquanto que no segundo caso é retornada como uma função unicamente de h. Obter a resposta nesta forma é muito útil quando se quer verificar se a resposta obtida esta correta. Isto é conseguido substituindo a resposta encontrada na equação diferencial original (e nas suas condições de contorno), como pode ser visto no exemplo a seguir:

```
In[271]:= k = 0.02
          TaxDec = DSolve[{y'[t] == -k * y[t], y[0] == 10}, y[t], t]
          Plot[y[t] /. TaxDec, {t, 0, 200}, PlotRange → {0, 10},
           AxesLabel → {Tempo, Variável}, AxesStyle → FontSize → 14]

Out[271]= 0.02

Out[272]= {{y[t] → 10 e^(-0.02 t)}}
```

Out[273]=

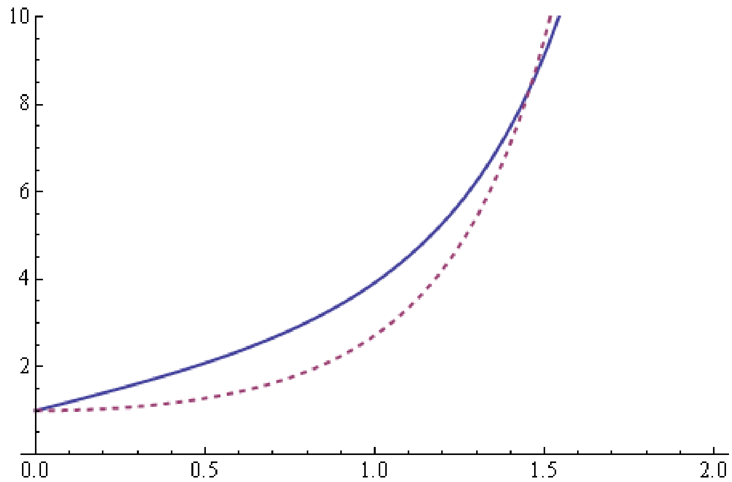



```
          DSolve[D[f[x, y], x] == x^2 + y, f, {x, y}]
          DSolve[g'[h] == Sin[h + Pi], g, h]

Out[165]= {{f → Function[{x, y}, x^3/3 + x y + C[1][y]]}}

Out[166]= {{g → Function[{h}, C[1] + Cos[h]]}}


In[174]:=
          Eq1 = {y'[x] == y[x] * Cos[x], y[0] == Pi}
          sol1 = DSolve[Eq1, y, x]

Out[175]= {y'[x] == Cos[x] y[x], y[0] == π}

Out[176]= {{y → Function[{x}, e^Sin[x] π]}}

In[177]:=
          Eq1 /. sol1 (*Substitui a solução na equação diferencial*)

Out[177]= {{True, True}}
```

O comando DSolve pode ser utilizado também na resolução de sistemas de equações diferenciais, bastando para isto acrescentar uma *lista* de equações. Um exemplo do uso desta função é mostrado a seguir:

Como pode ser visto, muitas vezes o Mathematica retorna a solução em termos envolvendo funções especiais. Esta forma é utilizada pelo programa como uma maneira de simplificar a apresentação da solução, o que ajuda muitas vezes a entender o comportamento do sistema. Normalmente, as funções especiais, tal como as de Bessel, Hermite, Legendre, Hipergeométricas, Mathieu, etc., advém da resolução de equações diferenciais específicas. O exemplo a

```
In[109]:= eq1 = {f'[x] == 2 * g[x], f[0] == 1};
          eq2 = {g'[x] == x * f'[x], g[0] == 1};
          sol = DSolve[{eq1, eq2}, {f[x], g[x]}, x]
          Plot[{f[x] /. sol, g[x] /. sol}, {x, 0, 2}, PlotRange → {0, 10},
           PlotStyle → {Thick, {Thick, Dashed}}, AxesStyle → FontSize → 14]

Out[111]= {{g[x] → e^(x^2), f[x] → 1 + √π Erfi[x]}}

Out[112]=
```



seguir mostra a utilização de funções especiais na resolução de uma EDO.

Exemplo 2 - Equação de Mathieu. A Equação de Mathieu é uma equação diferencial ordinária de grande importância em diversas áreas da física e da matemática, especialmente na análise de comportamento oscilatório e coordenadas elípticas cilíndricas. A forma geral da equação de Mathieu é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (a - 2q\cos(2t))u = 0$$

considerando como condições de contorno que $y[0] = \pi/2$ e $y[\pi] = 0$, obtenha $y[t]$. Considere que $q = 3$ e $a = 4$.

Como pode ser visto, a solução para a equação de Mathieu é dada em apresentada na forma de diversas funções especiais pertencentes a classe das *funções de Mathieu*, que representam a solução desta equação diferencial em especial.

C.1.2. Exercícios Propostos I

Obtenha a derivada (em relação às diversas variáveis) das seguintes funções:

1) $f(x, y) = \sin[x]\cos[y]$ 2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

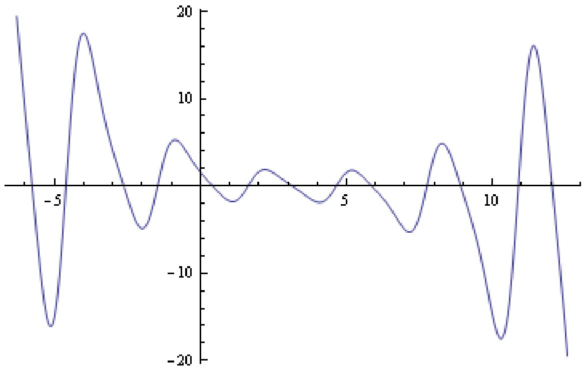
Resolva as seguintes EDO's grafique a solução obtida:

In[218]:=

```
MathieuEq = {y''[t] + (a - 2 q * Cos[2 * t]) * y[t] == 0, y[0] == Pi / 2, y[Pi] == 0};
q = 3;
a = 4;
sol = DSolve[MathieuEq, y[t], t]
Plot[y[t] /. sol, {t, -2 Pi, 4 Pi}]
```

Out[221]= $$\left\{\left\{\text{y[t]} \to -\frac{\pi\,\text{MathieuC[4, 3, t] MathieuS[4, 3, }\pi\text{]} - \pi\,\text{MathieuC[4, 3, }\pi\text{] MathieuS[4, 3, t]}}{2\,(\text{MathieuC[4, 3, }\pi\text{] MathieuS[4, 3, 0]} - \text{MathieuC[4, 3, 0] MathieuS[4, 3, }\pi\text{]})}\right\}\right\}$$

Out[222]=



3) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad y'[0] = \pi \quad y(0) = 0$ (Equação de Bessel)

4) $\dfrac{1}{\zeta^2}\dfrac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\dfrac{d\theta}{d\zeta}\right) + \theta = 0 \quad \theta[0] = 1 \quad \theta[Pi] = 0$ (Equação de Lane-Emden)

C.1.3. EDO's com Solução Numérica

Grande parte das equações diferenciais possui alguma não-linearidade em sua estrutura, e portanto, não possuem solução analítica. Nestes casos, resta utilizar algum método numérico para encontrar uma solução aproximada para a equação diferencial. Existem muitos métodos numéricos que tem como objetivo encontrar esta solução aproximada para as equações diferenciais, sendo que o mais famoso (e mais utilizado) na resolução de diferenciais ordinárias é o método de Runge-Kutta.

Apesar de não ser um software muito completo nesta área, o Mathematica fornece a possibilidade de resolver um grande número de equações diferenciais por via numérica, especialmente as diferenciais ordinárias.

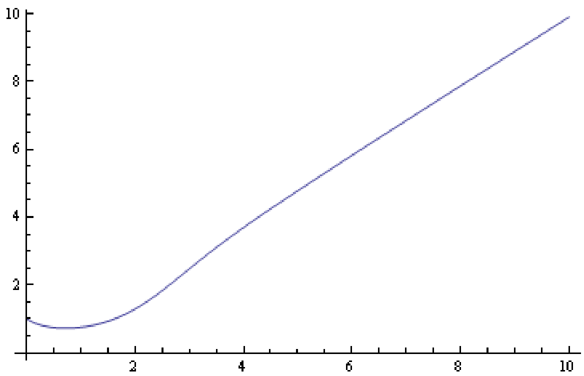
O comando básico para acessar estas funções é o NDSolve, muito semelhante ao DSolve:

$$\text{NDSolve[eqDiff}, f[x], \{x, x_{min}, x_{max}\}]$$

porém, percebe-se que neste caso deve-se especificar os limites inferior e superior da variável independente, pois a solução é obtida é válida em um intervalo finito, diferentemente da solução algébrica.

Outra diferença básica entre os comandos DSolve e NDSolve deve-se ao fato de o segundo não realizar operações simbólicas, ou seja, não é possível resolver uma equação diferencial numericamente sem especificar todos os termos (com valores numéricos) ou sem especificar alguma das condições de contorno necessárias para que a solução seja possível. Considere o exemplo a seguir:

```
Clear["Global`*"]
sol = NDSolve[{y'[x] + y[x]^2 == x*y[x], y[0] == 1}, y[x], {x, 0, 10}]
Plot[y[x] /. sol, {x, 0, 10}]

Out[98]= {{y[x] → InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>][x]}}

Out[99]=
```



Como pode ser visto, a solução da EDO é apresentada como uma *função de interpolação*. Isto acontece pois durante a resolução da equação diferencial, o programa gera uma tabela de pontos que relaciona a variável independente x com a função $y(x)$, de modo que o valor da função em pontos definidos é obtida através da interpolação dos dados existentes.

Os métodos de resolução numérica de equações diferenciais, tanto das ordinárias quanto as parciais, são métodos discretos, ou seja, o avanço em relação a posição da variável independente é feito através de *passos*. O método de Runge-Kutta, por exemplo, utiliza o parâmetro h (muitas vezes chamado de passo de tempo, apesar de não ser restrito a derivadas temporais). Nos métodos de solução de EDP, a discretização das equações torna-se mais clara, sendo que para isto utiliza-se normalmente uma *malha numérica*. Felizmente, o Mathematica calcula estes avanços automaticamente, refinando a solução em regiões onde a convergência é mais difícil de ser atingida.

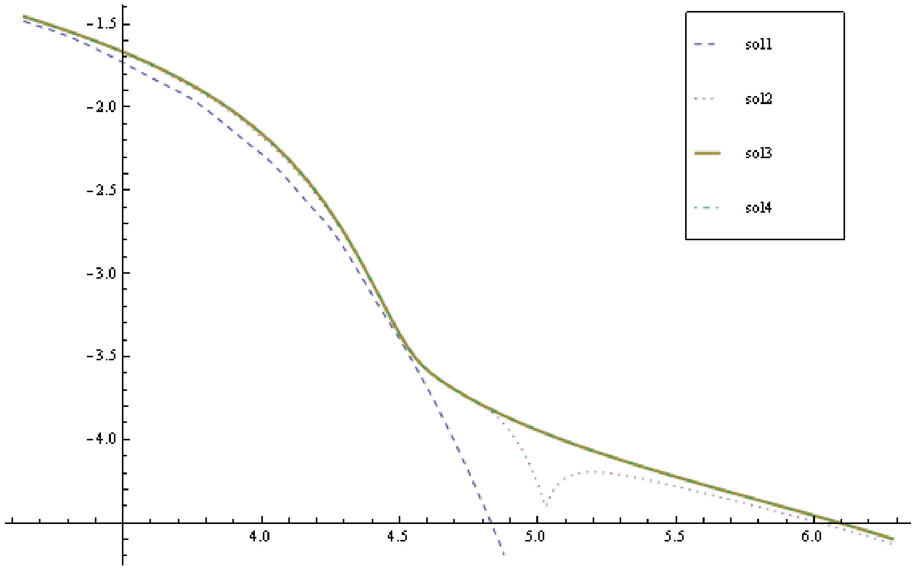
Como comentado em tópicos anteriores, os comandos numéricos, como o FindRoot ou o NDSolve permitem a especificação da precisão desejada para a resposta através dos comandos **PrecisionGoal** e **AccuracyGoal**. O comando AccuracyGoal determina o erro absoluto[1],

[1]Erro absoluto: Diferença entre o valor exato da variável e o valor estimado numericamente.

enquanto que o PrecisionGoal determina o erro relativo[2]. Cabe destacar que estes parâmetros são dados em termos de dígitos de precisão, e não em termos dos valores dos erros.

```
In[308]:= eq = {y'[x] * Cos[x]^2 + Log[y[x] + x] == 0, y[0] == 1};
          sol1 = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}, AccuracyGoal → 1];
          sol2 = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}, AccuracyGoal → 2];
          sol3 = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}, AccuracyGoal → 5];
          sol4 = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}, AccuracyGoal → 50];
          Needs["PlotLegends`"];
          Plot[{y[x] /. sol1, y[x] /. sol2, y[x] /. sol3, y[x] /. sol4}, {x, Pi, 2 Pi},
           PlotStyle → {Dashed, Dotted, Thick, DotDashed} ,
           PlotLegend → {"sol1", "sol2", "sol3", "sol4"}, LegendSize → 0.5, LegendShadow → None,
           LegendPosition → {0.5, 0.1}]
```

Out[314]=



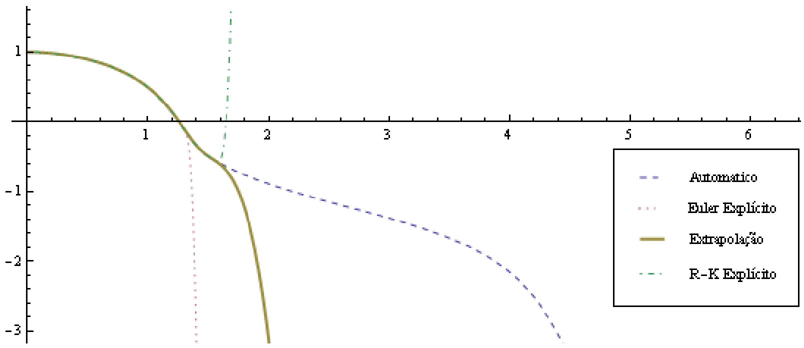
Observe o exemplo apresentado na página seguinte. Neste exemplo, é solicitado ao programa que resolva a mesma equação diferencial utilizando quatro valores para o parâmetros AccuracyGoal. Percebe-se que quando o critério de convergência é baixo, como no caso das soluções *sol1* e *sol2*, a solução obtida diverge. Para valores do parâmetro AccuracyGoal acima de 5 dígitos, a solução já apresenta o mesmo resultado, indicando convergência (ou pelo menos os resultados estão muito próximos).

O comando NDSolve permite a escolha também do método de resolução. Por padrão, a opção Automatic está ativa, sendo que o programa selecionará automaticamente um método para resolver a equação diferencial. Porém, é possível optar por métodos específicos, como mostrado no exemplo a seguir.

Como pode ser visto, os quatro métodos utilizados apresentam soluções muitos distintas. Analisando o problema, percebe-se que a única solução que apresenta convergência é a obtida com a opção Automatic. Neste caso, os outros métodos de solução foram escolhidos sem uma

[2] Erro relativo: Razão entre o erro absoluto e o módulo da variável exata.

```
eq = {y'[x] * Cos[x]^2 + Log[y[x] + x] == 0, y[0] == 1};
solAuto = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}]
solEulerExp = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}, Method → "ExplicitEuler"];
solExtrap = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}, Method → "Extrapolation"];
solExpRK = NDSolve[eq, y[x], {x, 0, 2 Pi}, Method → "ExplicitRungeKutta"];
Plot[{y[x] /. solAuto, y[x] /. solEulerExp, y[x] /. solExtrap, y[x] /. solExpRK}, {x, 0, 2 Pi},
 PlotLegend → {"Automatico", "Euler Explícito", "Extrapolação", "R-K Explícito"},
 LegendShadow → None, PlotStyle -> {Dashed, Dotted, Thick, DotDashed}, LegendSize → 1]
```



análise aprofundada, sendo que nenhum deles foi capaz de resolver a equação diferencial. Assim, caso queira-se optar por algum método específico, deve-se ter consciência da sua capacidade para resolver a equação diferencial.

O comando NDSolve também pode ser utilizado na resolução de sistemas de EDO's, conforme apresentado no exemplo a seguir:

Exemplo 3: Equações de Lotka-Volterra As Equações de Lotka-Volterra, também chamadas de equação presa-predador, são muito utilizadas na descrição da dinâmica de sistemas biológicos onde existem duas espécies, uma presa e uma predadora. Matematicamente, trata-se de um sistema de duas EDO's não-lineares, expressas por:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(c - dx)$$

onde x representa o número de espécies da presa e y o número de predadores. As constantes do modelo representam parâmetros de interação entre as espécies. Considere um sistema contendo inicialmente 1.2 unidades de coelhos (milhares, por exemplo) e 0.3 lobos[3]. Obtenha a variação no número de espécies com o passar do tempo.

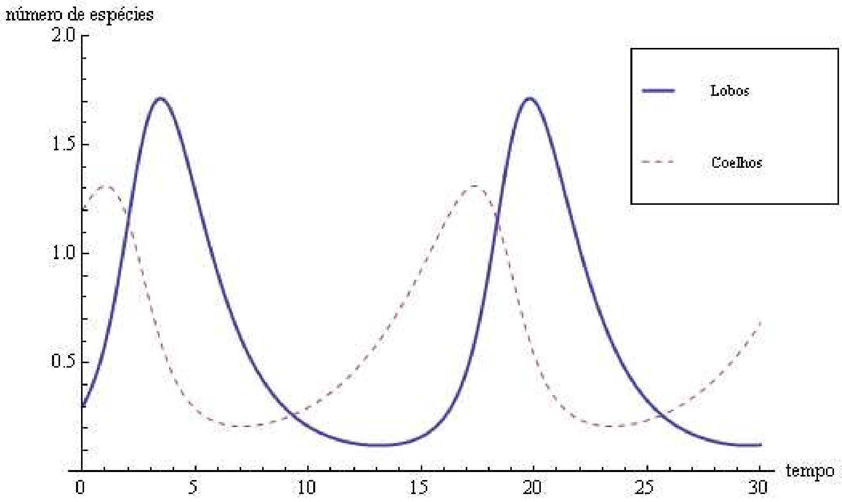
C.1.4. Exercícios Propostos II

Resolva as seguintes equações diferenciais e grafique o resultado obtido.

[3] Os valores pequenos para o número de espécies são utilizados para facilitar a convergência

```
In[198]:= a = 0.3;
          b = 0.5;
          c = 0.6;
          d = 1;
          sol = NDSolve[{x'[t] == x[t] (a - b*y[t]), y'[t] == -y[t] (c - d*x[t]), x[0] == 1.2, y[0] == 0.3},
             {y[t], x[t]}, {t, 0, 30}];
          Needs["PlotLegends`"];
          Plot[{y[t] /. sol, x[t] /. sol}, {t, 0, 30}, PlotRange → {0, 2}, PlotStyle → {Thick, Dashed},
           PlotLegend → {"Lobos", "Coelhos"}, LegendShadow → None, LegendSize → 0.5,
           LegendPosition → {0.5, 0.1}, AxesLabel → {"tempo", "número de espécies"},
           AxesStyle → FontSize → 12]
```

Out[204]=



1) Equação de Duffing: Trata-se de uma EDO não-linear de segunda ordem utilizada para descrever a dinâmica de sistemas caóticos, expressa por:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t + \phi)$$

Considere que:

$\delta = 1.15$ (coeficiente de amortecimento)

$\omega_0 = \pi$

$\beta = 300$

$\omega = 5$

$\phi = \pi/2$

e como condições de contorno, $y[0] = 1$ e $y'[0] = 0$. Obtenha o comportamento do sistema para as primeiras 10 unidades de tempo.

2) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$y'[t] + \ln(y[t]) = \cos[x[t]]$ $\qquad\qquad$ $y[0] = Pi$

$x'[t] + y[t] = 0$ $\qquad\qquad$ $x[0] = 0$

C.2. Equações Diferenciais Parciais

As equações diferenciais ordinárias possuem uma aplicação muito limitada na descrição de problemas físicos reais, pois, na maioria dos casos, as quantidades físicas de interesse variam em relação a mais de uma variável. Nesta seção serão abordados alguns detalhes sobre as funcionalidades do Mathematica na resolução de EDP's.

C.2.1. EDP's com Solução Analítica

A resolução das equações diferenciais parciais é muito semelhante a das diferencias ordinárias, sendo que o mesmo comando básico é utilizado, ou seja, o DSolve. Como se sabe, a resolução analítica de diferencias parciais é bastante limitada, sendo restritas a casos bastante simplificados, normalmente função de não mais que duas variáveis independentes.

As EDP's de primeira ordem possuem uma resolução mais simples que as de ordem superior, sendo que normalmente são classificadas em três grupos: lineares, não-lineares e quasi-lineares. Assim como no caso das diferenciais ordinárias, as EDP's não-lineares não possuem solução analítica, de modo que necessitam um tratamento numérico (este caso será abordado na próxima seção).

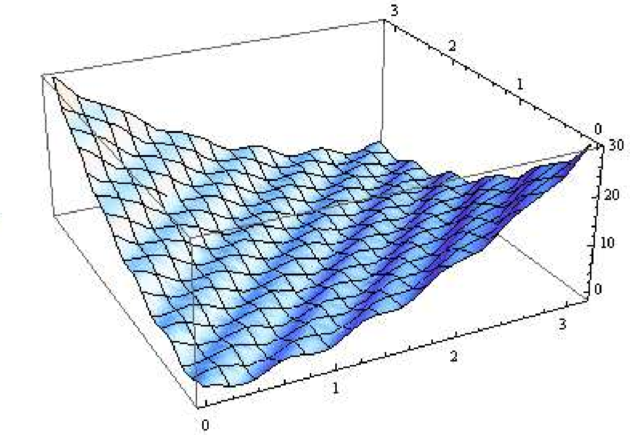
As diferenciais parciais de primeira ordem lineares são o caso mais simples de EDP que admite solução analítica. As equações ditas quasi-lineares são equações onde algum parâmetro dependente da variável dependente aparece multiplicando alguma derivada. Apesar de não serem equações diferenciais lineares, em alguns casos, estas equações admitem solução analítica. A seguir são apresentados dois exemplos de equações diferenciais parciais, uma linear e outra quasi-linear.

```
In[226]:=

Clear["Global`*"]
Linear = DSolve[{D[T[x, t], t] + D[T[x, t], x] == 0}, T, {x, t}]
QuasiLinear = DSolve[{D[u[x, t], t] + u[x, t] * D[u[x, t], x] == 0}, u, {x, t}]

Out[227]= {{T → Function[{x, t}, C[1][t - x]]}}

Out[228]= Solve[C[1][u[x, t], (-x + t u[x, t])/u[x, t]] == 0, u[x, t]]
```

Como pode ser observado, a solução apresenta uma dependência em relação a um parâmetro C[1]. No caso das diferenciais ordinárias, este parâmetro representava uma constante, já no caso das diferenciais parciais este parâmetro assume a forma de uma *função*. Caso queria-se obter a solução característica da equação diferencial, deve-se informar qual é esta função. Veja o exemplo a seguir:

```
In[20]:= eq = {D[T[x, y], x] + D[T[x, y], y] == 0};
         sol = DSolve[eq, T, {x, y}]

Out[21]= {{T → Function[{x, y}, C[1][-x + y]]}}

In[85]:=
         solCar = T[x, y] /. sol[[1]] /. C[1][t_] → 3 t^2 + Cos[Pi^2 * t]
         Plot3D[solCar, {x, 0, Pi}, {y, 0, Pi}, PlotRange → {-2, 30}]

Out[85]= 3 (-x + y)^2 + Cos[π^2 (-x + y)]
```

Out[86]=



Na maioria dos casos, a função característica é desconhecida, sendo que o que realmente se conhece são as condições de contorno do problema. Porém, o comando DSolve não é muito útil na resolução de problemas de valor inicial ou de contorno, sendo que neste caso é aconselhável a utilização do NDSolve.

A maioria das equações diferenciais lineares de interesse na área da engenharia são de segunda ordem, como por exemplo as equações de Laplace, da difusão, da onda, etc. Estas equações costumam ser divididas conforme a espécie das suas curvas características em parabólicas, hiperbólicas ou elípticas. A solução analítica de cada um desse tipo de equação possui características distintas, sendo que maiores detalhes não serão abordados neste curso pois trata-se de um assunto bastante específico.

C.2.2. Exercícios Propostos III

Encontre a solução geral das seguintes equações diferenciais parciais:

$$1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(Equação de Laplace - EDP elíptica)}$$

$$2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{(Equação da onda - EDP hiperbólica)}$$

$$3)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=k\frac{\partial T}{\partial t}=0 \qquad \text{(Equação do calor - EDP parabólica)}$$

C.2.3. EDP's com Solução Numérica

Obter a solução geral para as equações diferenciais parciais não costuma ser suficiente quando se deseja resolver equações utilizadas na modelagem de problemas físicos. Na maioria dos casos, busca-se obter a variação da variável dependente mediante a imposição de um certo número de condições de contorno. Neste caso, deve-se optar por um método numérico para a resolução da equação.

O método padrão utilizado pelo Mathematica é o *Método das Linhas* (MOL). Este método é derivado do método de diferenças finitas, porém possui uma eficiência maior em termos de precisão e tempo computacional gasto em comparação com o método de DF clássico. Este método na verdade pode ser visto como um método *semi-analítico*, pois envolve a discretização da equação diferencial em uma (ou duas) dimensões, enquanto que a dimensão restante é resolvida analiticamente. A principal utilidade deste método é na resolução de equações hiperbólicas (como a equação da onda), porém também pode ser utilizado para equação parabólicas e elípticas.

A aplicação do método das linhas envolve basicamente cinco passos:

1. Divisão do domínio de solução em camadas;
2. Discretização da equação diferencial em uma direção;
3. Transformação para obter equações diferenciais ordinárias desacopladas;
4. Transformação inversa e introdução das condições de contorno;
5. Solução das equações resultantes.

O uso do método das linhas é restrito a problemas que contém uma condição inicial em pelo menos uma das variáveis independentes, não podendo ser utilizado, portanto, em problemas que só possuem condições de contorno (especialmente envolvendo equações elípticas como a de Laplace). No exemplo a seguir é apresentado o uso do método das linhas na resolução da equação do calor.

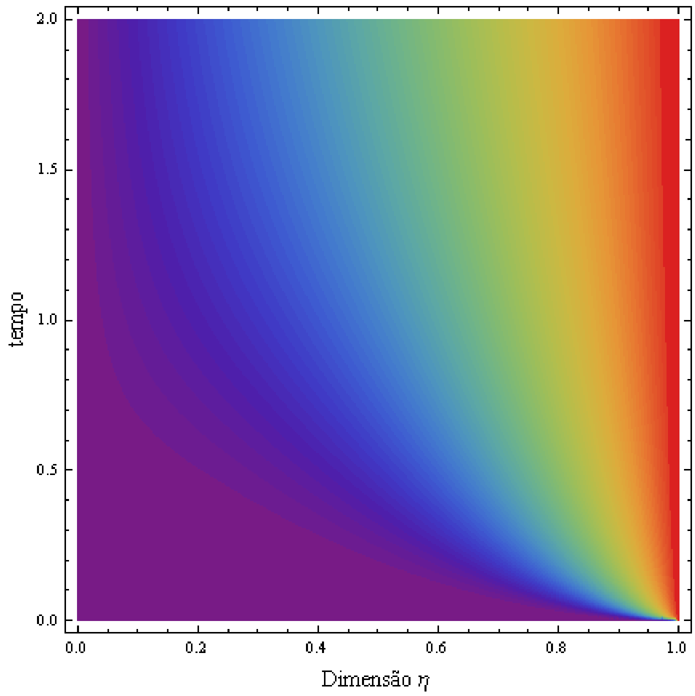
Exemplo 4: Equação do Calor Considere um sistema unidimensional, inicialmente a uma temperatura T_0, com suas extremidades (dimensão x) expostas a temperaturas T_0 e T_{max}. A equação que descreve a variação da temperatura ao longo da dimensão x e do tempo é conhecida como Equação do Calor, sendo dada por:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Obtenha a distribuição de temperatura. Considere $\alpha = 0.1$

Para facilitar a solução, será utilizada a temperatura adimensional θ $(T - T_0/T_{max} - T_0)$ e a distância adimensional η (x/x_{max}).

```
In[261]:= sol = NDSolve[{D[θ[η, t], t] == 0.1*D[θ[η, t], η, η], θ[η, 0] == η^250,
              θ[0, t] == 0, θ[1, t] == 1}, θ[η, t], {η, 0, 1}, {t, 0, 2}]
          Needs["PlotLegends`"];
          ContourPlot[θ[η, t] /. sol, {η, 0, 1}, {t, 0, 2}, ColorFunction → "Rainbow",
           Contours → 80, FrameLabel → {Style["Dimensão η", 14], Style["tempo", 14]},
           ContourLines → False]

Out[261]= {{θ[η, t] → InterpolatingFunction[{{0., 1.}, {0., 2.}}, <>][η, t]}}

Out[263]=
```



Pode ser visto que o resultado obtido está de acordo com o comportamento esperado. Porém, também pode ser visto que a condição inicial foi definida como $\theta(\eta, 0) = \eta^{250}$, e não $\theta(\eta, 0) = 0$, como dito pelo enunciado. Este estratagema é utilizado para que não ocorra inconsistência entre as condições, pois se a temperatura adimensional fosse definida como sendo nula em relação a todos os valores de η, teríamos que $\theta[1,0] = 0$. Porém, da segunda condição de contorno, temos que $\theta[1,0] = 1$.

Como pode ser visto, as duas condições são conflitantes. Porém, temos que $\eta^{250} \approx 0$ para todo $\eta \neq 1$ e $\eta^{250} = 1$ para $\eta = 1$. Isto representa uma aproximação da condição inicial que não entre em conflito com nenhuma das condições de contorno. Com este exemplo, percebe-se a dificuldade na imposição das condições de contorno para a resolução numérica de equações diferenciais.

O comando NDSolve também pode ser utilizado na resolução de sistemas de EDP's não-lineares. Porém, esta função fica restrita a problemas muito específicos, não sendo útil na maioria dos casos práticos.

A seguir, será apresenta outra aplicação do comando NDSolve, na resolução da equação da onda.

Exemplo 5: Equação da Onda:. Considere uma onda unidimensional com comprimento de onda[4] $\lambda = 8$, se propagando com velocidade $c = 1$. A equação que descreve a dependência da amplitude u em função da posição x e do tempo t é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Determine o comportamento da onda, tendo como condições de contorno e iniciais para $u[t,x]$:

$u[0,x] = e^{-x^2}$

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = 0$

$u[t,-4] = u[t,4]$

C.2.4. Exercícios Propostos IV

Resolva as seguintes EDP's numericamente, graficando a superfície de resposta obtida.

1)$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\quad$ $u[0,t] = 1$ $\quad$ $u[x,0] = \cos(\pi x)$

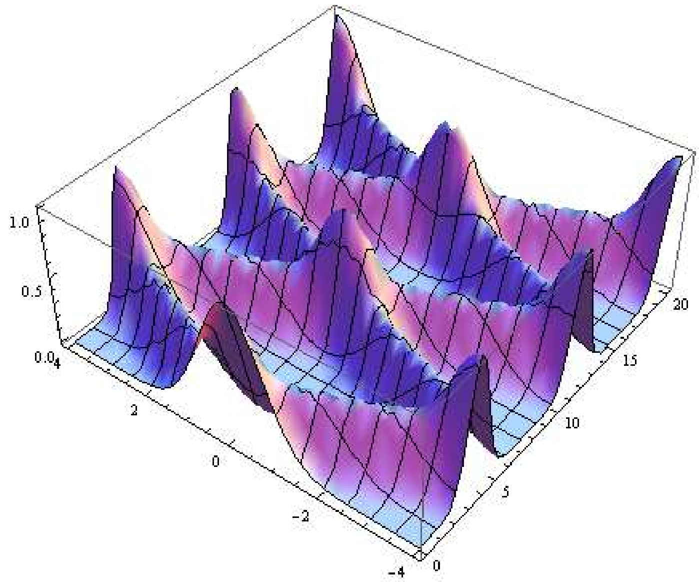
2)Considere a seguinte equação de transporte:

$$0.3\frac{\partial T}{\partial x} = 0.05\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

[4] O exemplo será resolvido sem especificação das unidades

```
In[96]:= sol = NDSolve[{D[u[t, x], t, t] == D[u[t, x], x, x], u[0, x] == e^(-x^2),
            u^(1,0)[0, x] == 0, u[t, -4] == u[t, 4]}, u, {t, 0, 20}, {x, -4, 4}]
         Plot3D[Evaluate[u[t, x] /. sol], {t, 0, 20}, {x, -4, 4}]

Out[96]= {{u → InterpolatingFunction[{{0., 20.}, {-4., 4.}}, <>]}}
```

Out[97]=



com as condições de contorno:

$$T[0,y]=0 \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{x=0}=0 \qquad T[x,0]=x$$

Obtenha o perfil de temperatura.