

# MATERIAL DE APOIO – Integrais

Élton Fontana

Fábio César Menslin Júnior

## 1 Definições

### 1.1 Integral indefinida

Uma integral é dita indefinida quando não se conhece os limites de integração, ou seja, o intervalo no qual ela está sendo integrada.

**Exemplo:**

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Na integração indefinida, a função resultante será a função integrada  $F(x)$ , sendo necessário somá-la a uma constante, chamada de constante de integração. Neste trabalho  $C$  será sempre tratada como a constante de integração e  $k$  sempre será uma constante qualquer que venha a aparecer.

### 1.2 Integral definida

Diferentemente da integral indefinida, os limites da integral definida já estão estabelecidos, para resolvê-la, basta encontrar a integral da função em questão, e neste resultado substituir os valores dos limites superior e inferior.

**Exemplo:**

$$\int_A^B f(x) dx = F(x) + C \Big|_A^B = (F(B) + C) - (F(A) + C)$$

Como as constantes de integração são iguais, a integral definida é a subtração das funções primitivas substituídas pelos limites superior e inferior, neste caso (B e A respectivamente). Resultando em:

$$\int_A^B f(x) dx = F(B) - F(A)$$

## 2 Propriedades Básicas

### 2.1 Soma e Subtração

Qualquer soma ou subtração de funções, que estejam dentro da integral, pode ser separada como a soma/subtração individual da integral de cada função.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

**Exemplo:**

---

$$\int (x^2 + 3x - 2) dx$$

$$\int (x^2 + 3x - 2) dx = \int x^2 dx + \int 3x dx - \int 2 dx$$

Agora basta resolver individualmente cada uma das integrais obtendo-se:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C = F(x)$$

### 2.2 Constantes

Qualquer constante que multiplique a função dentro da integral, é equivalente a multiplicação da integral pela mesma constante.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

### Exemplo:

$$\int \frac{(x^2 + 3x - 2)}{x} dx$$

$$\int \frac{(x^2 + 3x - 2)}{x} dx =$$

$$\int \frac{x^2}{x} dx + \int \frac{3x}{x} dx - \int \frac{2}{x} dx =$$

$$\int x dx + \int 3 dx - \int \frac{2}{x} dx$$

Semelhante ao exemplo anterior podemos separar a integral na soma/subtração de integrais. E simplificar o que for possível.

Percebe-se que 3 e 2 são constantes multiplicando uma função  $f(x)$ , para o caso de 3,  $f(x) = 1$  e para 2,  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Portanto podemos tirá-los da integral resultando em:

$$\int x dx + \int 3 dx - \int \frac{2}{x} dx = \int x dx + 3 \int dx - 2 \int \frac{1}{x} dx$$

Resolvendo-se individualmente cada integral obtemos que:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln(x) + C$$

## 3 Métodos para resolução de integrais

### 3.1 Método por substituição de variável

O método por substituição de variável consiste em transformar uma integral desconhecida em uma integral direta e mais fácil de ser resolvida, a partir da substituição da variável independente em uma nova variável.

**Exemplo:**

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2x dx$$

Inicialmente escolhemos uma das funções presentes na integral. Neste caso foi escolhido  $x^2 + 1$  e dissemos que uma variável qualquer  $u$  assume os valores desta função. Além disso, derivamos esta função para obter a dependência dessa com as variações em  $dx$ .

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \rightarrow \int \frac{du}{u}$$

Com os valores obtidos anteriormente podemos substituir na integral desejada.

A integral obtida é uma integral direta, que pode facilmente ser resolvida ao olhar para a tabela de integrais. Resultando em:

$$\int \frac{du}{u} = \ln(u) + C$$

Resolvida a integral, basta substituir todos os lugares com a variável  $u$ , pela função que foi atribuída a ela, neste caso  $x^2 + 1$ . Resultando em:

$$F(x) = \ln(x^2 + 1) + C$$

### 3.2 Método por partes

O método de integração por partes vem da derivação de uma multiplicação de funções. Abaixo mostra-se o desenvolvimento da derivação de duas funções.

#### Desenvolvimento:

Dadas duas funções:  $g(x)$  e  $f(x)$ . A derivada da multiplicação de  $g(x)f(x)$  será dada pela fórmula abaixo (não vou entrar nos méritos da demonstração pela definição de derivada).

$$\frac{d(g * f)}{dx} = \frac{d(g)}{dx} f + \frac{d(f)}{dx} g$$

Integrando ambos os lados:

$$\int \frac{d(g * f)}{dx} dx = \int \frac{d(g)}{dx} f dx + \int \frac{d(f)}{dx} g dx$$

A integral da derivada  $\int \frac{d(g * f)}{dx} dx$  resulta diretamente na multiplicação de  $g(x)f(x)$ . Rearranjando os termos e isolando uma das integrais obtém-se:

$$g * f - \int \frac{d(g)}{dx} f dx = \int \frac{d(f)}{dx} g dx$$

Com isso o desenvolvimento da integração por partes é finalizado, a ideia é separar uma multiplicação de funções e torná-las em uma derivada mais simples de se resolver. O exemplo a seguir vai ilustrar este tipo de integração.

**Exemplo:**

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx$$

$$g(x) = x \rightarrow \frac{d(g)}{dx} = 1$$

$$\frac{d(f)}{dx} = \operatorname{sen}(x) \rightarrow f(x) = -\cos(x)$$

Percebe-se a integral é uma multiplicação de funções, logo o método de integral por partes pode ser aplicado. Neste caso escolhemos uma função para ser  $g(x)$  e outra como  $\frac{d(f)}{dx}$

$$\begin{aligned} g * f - \int \frac{d(g)}{dx} f dx &= \int \frac{d(f)}{dx} g dx \\ -x \cos(x) - \int -\cos(x) dx & \\ &= \int x \operatorname{sen}(x) dx \end{aligned}$$

Com as funções obtidas, basta substituir na fórmula da integral por partes.

Percebemos que com a integral por partes, sobrou apenas uma integral simples para se resolver,  $\int -\cos(x) dx$ .

$$-x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$$

$$= \int x \operatorname{sen}(x) dx$$

Com a integral resolvida, indiretamente obteve-se a resposta para  $\int x \operatorname{sen}(x) dx$ .

$$F(x) = \operatorname{sen}(x) - x \cos(x) + C$$

### 3.3 Método por frações parciais

Por fim, o último método de integração a ser abordado é o método de frações parciais. Como o próprio nome implica, o método busca reduzir uma integral que parece complexa, em um somatório de frações de simples integração. Antes serem feitos exemplos, é necessário lembrar de dois conceitos.

**Multiplicidade de uma raiz:** A multiplicidade de uma raiz se deve a quantas vezes ela pode ser resposta de um polinômio  $p(x) = 0$ .

**Exemplo:**  $p(x) = x^3$ , neste caso, 0 é raiz de multiplicidade 3 da equação  $p(x)$ , pois serve como resposta 3 vezes. (veja que podemos escrever  $x^3$  como  $x \cdot x \cdot x$ ).

**Outro exemplo:**  $p(x) = (x - 3)^2(x - 2)^3(x + 3)$ , neste caso, podemos ver que 3 será resposta duas vezes, 2 será resposta três vezes e -3 será resposta uma vez. Portanto 3 é raiz de multiplicidade dois, 2 é raiz de multiplicidade três e -3 é raiz de multiplicidade 1.

**Fatoração de polinômios:** A fatoração de polinômios visa reduzir um polinômio a uma multiplicação de fatores.

**Exemplo:**  $p(x) = x^2 - 4x + 3$ , este polinômio pode ser reduzido como  $p(x) = (x - 3)(x - 1)$ .

Vamos agora, aplicar estes conhecimentos na integração por partes.

### Exemplo:

$$\int \frac{x^2 - 3}{(x - 3)^2(x - 1)} dx$$

$$(x - 3)^2 \rightarrow \text{multiplicidade } 2$$

$$(x - 1) \rightarrow \text{multiplicidade } 1$$

Passo 1: Fatorar (já está fatorado) e definir a multiplicidade das raízes

$$\int \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2} + \frac{C}{x - 1} dx$$

Passo 2: Assumir que a soma de frações parciais, gera a função final. **Note que:** devido a multiplicidade de (x-3) ser 2, ela aparece duas vezes na soma.

$$\int \frac{A(x - 3)(x - 1) + B(x - 1) + C(x - 3)^2}{(x - 3)^2(x - 1)} dx$$

Passo 3: Faz-se a soma das frações, para determinar A, B e C.

$$Ax^2 - 4Ax + 3A + Bx - B + Cx^2 - 6Cx + 9C = x^2 - 3$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \text{ (comparando com } x^2) \\ -4A + B - 6C = 0 \text{ (comparando com } x) \\ 3A - B + 9C = -3 \text{ (comparando com } -2) \end{cases}$$

Passo 4: Igualam-se os numeradores do método com a função inicial, e assim por comparação podemos montar um sistema

$$A = \frac{3}{2}; B = 3; C = -\frac{1}{2};$$

$$\int \frac{\frac{3}{2}}{x - 3} + \frac{3}{(x - 3)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x - 1} dx$$

Passo 5: Resolvendo o sistema obtemos as constantes e substituindo na integral anterior

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{x-3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

Passo 6: Aplicando a propriedade de soma e de multiplicação por uma constante podemos separar as integrais em:

Agora a resolução do problema se tornou bastante simplificada, bastando resolver individualmente cada uma das integrais apresentadas.

$$F(x) = \frac{3}{2} \ln(x-3) - 3 \left( \frac{1}{x-3} \right) - \frac{1}{2} \ln(x-1) + C$$

### Método dos resíduos para frações parciais

Além do método mostrado acima, outro método é possível de ser usado, aqui apresentarei o caso para quando todas as raízes do denominador tem multiplicidade 1. Caso maior multiplicidade (como no exemplo acima), a fórmula para calcular os numeradores é extensa e trabalhosa.

Legenda:

$A_n \rightarrow$  *coeficiente no índice n*

$r_n \rightarrow$  *raiz no índice n*

Após fatorar a equação. Obtemos de forma genérica o seguinte polinômio.

$$H(x) = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} \dots + Cx + D}{(x-r_n)(x-r_{n-1}) \dots (x-r_2)(x-r_1)}$$

É possível escrevê-lo em frações parciais como apresentado abaixo:

$$P(x) = \frac{A_n}{x - r_n} + \frac{A_{n-1}}{x - r_{n-1}} + \dots + \frac{A_3}{x - r_3} + \frac{A_2}{x - r_2} + \frac{A_1}{x - r_1}$$

Os coeficientes deste polinômio podem ser calculados de forma direta pela seguinte fórmula. É necessário notar que para que a resolução seja possível, o grau do polinômio do numerador, deve ser menor que o denominador.

$$A_n = \lim_{x \rightarrow r_n} ((x - r_n) * H(x))$$

O próximo exemplo será o cálculo de uma integral por frações parciais utilizando este método.

**Exemplo:**

$$\int \frac{x - 2}{(x - 3)(x - 1)} dx$$

$$P(x) = \frac{A_1}{x - 3} + \frac{A_2}{x - 1}$$

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow 3} ((x - 3) * \frac{x - 2}{(x - 3)(x - 1)})$$

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{(x - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \left( (x - 1) * \frac{x - 2}{(x - 3)(x - 1)} \right)$$

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{(x - 3)} = \frac{1}{2}$$

Passo 1: Fatorar (já está fatorado) e aplicar a fórmula.

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{x - 3} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 3} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx$$

Passo 2: Substituindo os coeficientes. Separamos em duas integrais.

**As integrais separadas são de fácil resolução e podem ser resolvidas por métodos como o da substituição.**

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x - 3) + \frac{1}{2} \ln(x - 1)$$

---

Quaisquer dúvidas referentes a matéria, não hesitar em procurar o monitor ou o professor!

E-mail para contato: [fabio.menslin@gmail.com](mailto:fabio.menslin@gmail.com)

Facebook: fabio.menslin

Whatsapp: meu celular está morto.