

Aula 01 - Sistemas de Equações Algébricas Lineares

Élton Fontana

A aplicação de leis físicas na modelagem de sistemas de interesse em muitos casos origina um conjunto de equações algébricas lineares que devem ser resolvidas simultaneamente. Além disso, métodos de resolução de equações diferenciais com frequência levam à transformação das equações diferenciais em um conjunto de equações algébricas que podem ser então resolvidas. Por exemplo, os métodos de diferenças finitas e de volumes finitos consistem em dividir o domínio de solução em um conjunto de pequenos elementos discretos, sendo para cada elemento atribuída uma equação algébrica. Este processo, chamado de discretização, sempre origina um conjunto de equações algébricas lineares.

É fundamental conseguir definir quando um sistema de equações algébricas lineares possui alguma solução (ou seja, é consistente) e se essa solução é única ou envolve um certo número de parâmetros arbitrários. O estudo de sistemas de equações algébricas lineares é um dos tópicos fundamentais da álgebra linear. A seguir será apresentada uma breve revisão da teoria básica de sistemas lineares e de sua resolução pelo método de eliminação de Gauss.

1 Conceitos Preliminares

Em muitos casos, deve-se buscar soluções para problemas do tipo:

$$f(x) = 0$$

Quando a função $f(x)$ possui a forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a equação é chamada de algébrica (ou polinomial). No caso onde $n = 1$, a equação é **linear**, enquanto que para casos onde $n > 1$ a equação é **não-linear**. Quando a função $f(x)$ não pode ser expressa como um polinômio, a equação é dita transcendental (por exemplo, $\sin(x)$, e^x , $\dots$) e possui um comportamento não-linear.

A equação anterior possui somente uma variável x , porém com frequência os problemas envolvem mais de uma variável e um sistema de equações acoplado. Neste momento, será considerado somente o caso onde todas as equações que formam o sistema são lineares, de modo que sistema com m equações e n variáveis pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

O sistema anterior pode ser escrito de diferentes formas, dependendo da conveniência. Por exemplo, pode ser expresso na forma vetorial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A expressão acima pode ainda ser simplificada definindo-se os vetores $\mathbf{a}_n$ dos coeficientes que multiplicam cada uma das variáveis, bem como os termos não-homogêneos (aqueles que não multiplicam nenhuma das variáveis):

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}$$

onde:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Quando todos os termos do vetor $\mathbf{b}$ são nulos, o sistema é chamado de **homogêneo**, enquanto que no caso onde pelo menos um dos termos b_m é diferente de zero, o sistema é chamado de **não-homogêneo**.

Na maioria dos casos, o mais conveniente é expressar os coeficientes na forma de uma matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$ definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O vetor $\mathbf{x}$ contém todas as variáveis do sistema linear:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Na maioria casos, a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ são conhecidos e deve-se determinar o vetor $\mathbf{x}$ que satisfaça a igualdade. Uma sequência de números $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ é dita solução do sistema linear se cada uma das m equações é satisfeita quando $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$ e assim sucessivamente. Se existirem uma ou mais soluções $\mathbf{s}$, o sistema é dito **consistente** e o conjunto de todas as possíveis soluções é chamado de **conjunto de soluções**. Caso existir somente um vetor $\mathbf{s}$ que satisfaz a equação, esta solução é chamada de **única**.

Considere o caso simplificado onde $m = n = 1$:

$$a_{11}x_1 = b_1$$

No caso genérico onde $a_{11} \neq 0$, a equação anterior admite a solução única $x_1 = b_1/a_{11}$, porém, se $a_{11} = 0$ existem duas possibilidades: se $b_1 \neq 0$ então não existe nenhum valor de x_1 que satisfaça a equação, portanto a equação não possui solução. Caso $b_1 = 0$ então a equação se torna $0x_1 = 0$ e qualquer valor de x_1 satisfaz a equação, portanto existem infinitas soluções. Apesar de simples, esta equação estabelece um padrão que pode ser observado para qualquer sistema *linear*: irá existir 1 solução, nenhuma solução ou infinitas soluções. Para sistemas de dimensões superiores, este comportamento pode ser facilmente entendido analisando as equações do ponto de vista geométrico, como será apresentado a seguir.

2 Interpretação Geométrica do Sistema Linear

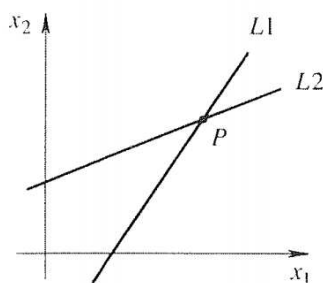
Considere o caso agora onde $m = n = 2$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

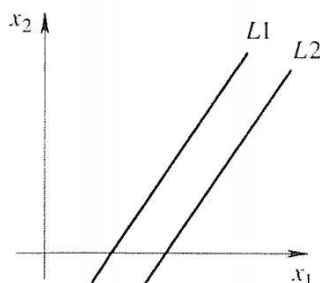
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Considerando que a_{11} ou a_{12} sejam diferentes de zero, então a primeira equação define uma reta no plano (x_1, x_2) , sendo que qualquer ponto sobre esta reta é uma solução para esta equação. De forma semelhante, se a_{21} ou a_{22} são não-nulos, a segunda equação forma uma reta e os pontos sobre esta reta são solução para esta equação.

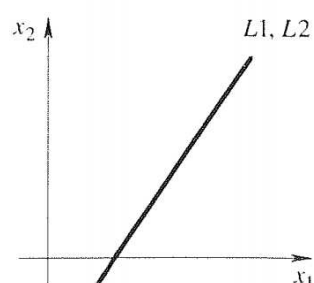
A partir disto, existem três possibilidades para a solução do sistema composto pelas duas equações. No primeiro caso, as retas podem se interceptar em um único ponto P , de modo que o sistema de equações irá admitir somente uma solução (ou seja, existe somente um conjunto de valores x_1, x_2 que satisfaz as duas equações ao mesmo tempo). A segunda possibilidade é que as retas sejam paralelas e não se interceptem em nenhum ponto. Neste caso, não haverá solução para o sistema linear (o sistema é inconsistente). Por último, as retas podem ser coincidentes, de modo que qualquer ponto sobre as retas irá satisfazer ambas as equações e portanto o sistema possui infinitas soluções. Estas possibilidades são ilustradas na figura a seguir.



(a) Solução única



(b) Sem solução



(c) Infinitas Soluções

Anteriormente, assumiu-se que, por exemplo, a_{11} ou a_{12} eram não nulos. Caso ambos valores forem nulos, o comportamento do sistema irá depender do valor de b_1 . Se $b_1 \neq 0$, então a primeira equação não possui solução e como consequência o sistema também não possui solução. Porém, se $b_1 = 0$, então qualquer valor de x_1 e x_2 satisfaz a primeira equação, sendo que o conjunto de soluções da segunda equação também será solução do sistema e portanto existem infinitas soluções.

Uma análise similar pode ser aplicada para sistemas de maior ordem. Por exemplo, para um sistema com $m = n = 3$ as soluções de cada uma das 3 equações será um

plano no espaço cartesiano x_1, x_2, x_3 . Novamente, os três planos podem se interceptar em um ponto único (única solução), em infinitos pontos (infinitas soluções) ou não se interceptarem (sem solução). De forma geral, para um sistema com $m = n \geq 4$, as soluções representam *hiperplanos* em um espaço n-dimensional.

3 Solução de Sistemas Lineares por Eliminação de Gauss

Como visto anteriormente, um sistema linear pode ser expresso em sua forma matricial como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

O método de eliminação de Gauss é um dos algoritmos mais simples utilizados para a resolução de sistemas lineares. O método consiste basicamente em transformar uma matriz $\mathbf{A}$ $m \times n$ com $m = n$ em uma matriz triangular superior através de operações no sistema que não alterem a igualdade. O método também pode ser usado para casos onde $m \neq n$, porém neste caso a matriz obtida não será triangular.

O primeiro passo para a resolução do problema com o método de eliminação é a obtenção da *matriz aumentada* $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ que representa o sistema. Esta matriz consiste na junção da matriz $\mathbf{A}$ com a parte não-homogênea $\mathbf{b}$. Para um sistema com m equações e n variáveis, a matriz aumentada é expressa como:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

A linha vertical é adicionada somente por conveniência. Para a resolução com o método de Gauss, deve-se zerar todos os elementos abaixo da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}$, de modo a se obter uma matriz aumentada com o seguinte formato:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Neste formado, a matriz é chamada de **matriz escalonada**. As seguintes operações elementares podem ser aplicadas na matriz aumentada original sem alterar a igualdade do sistema:

- 1 - Adição de uma linha com outra linha;
- 2 - Multiplicação de uma linha por uma constante não-nula;
- 3 - Troca de posição entre duas linhas.

Cabe ressaltar que estas operações podem ser aplicadas somente nas **linhas** da matriz e não nas **colunas**. A partir da obtenção da matriz escalonada, pode-se facilmente obter a solução do sistema linear através da retro-substituição no sistema linear.

Exercício 01: Resolva o seguinte sistema linear utilizando o método de eliminação de Gauss.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 8$$

A primeira etapa é definir a matriz aumentada com base nos coeficientes:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

A partir deste ponto, pode-se fazer qualquer uma das operações listadas anteriormente até se obter a matriz escalonada. Por exemplo, multiplicando a primeira linha por 3 e subtraindo da segunda linha ($L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1$), obtém-se:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Fazendo agora a terceira linha menos a primeira ($L_3 \rightarrow L_3 - L_1$):

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \end{array} \right]$$

Por último, pode-se subtrair a segunda linha da terceira ($L_3 \rightarrow L_3 - L_2$)

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Assim, o sistema linear inicial pode ser escrito como:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_2 + 4x_3 = 6$$

$$x_3 = 1$$

Partindo-se da última equação e avançando até a primeira, pode-se facilmente determinar a solução do sistema:

$$x_3 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_1 = 3$$

Para saber se esta é mesmo uma solução do problema, basta substituir os valores obtidos no sistema original e averiguar se as equações são satisfeitas:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3(3) - 1 + 1 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 - (-1) + 4(1) = 8$$

Portanto, os valores obtidos são uma solução do sistema.

Neste exemplo, obteve-se uma solução única para o sistema. Porém, como discutido anteriormente, podem haver casos onde nenhuma solução ou infinitas soluções são obtidas. Por exemplo, considere o seguinte sistema linear:

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$7x_1 - x_3 = 2$$

Aplicando operações elementares nas linhas da matriz aumentada, pode-se mostrar que este sistema pode ser escrito como:

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$$

$$-7x_2/2 + 2x_3 = 1$$

$$-7x_2/2 + 2x_3 = -4$$

Assim, a segunda e a terceira equação estabelecem igualdades que não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo, portanto o problema não possui solução.

De forma semelhante, quando existirem mais variáveis do que equações ($n > m$), não será possível obter uma solução explícita para cada variável, de modo que a solução do

problema irá conter parâmetros em aberto (que podem assumir qualquer valor) e assim o sistema irá possuir infinitas soluções.

Na maioria das situações, sistemas sem solução ou com infinitas soluções não possuem significado físico consistente. Por isso, deve-se garantir que os sistemas obtidos (por exemplo, na discretização de uma equação diferencial) possuam solução única. Para definir os casos onde o sistema possui solução única, é necessário primeiramente rever os conceitos de independência linear e posto de uma matriz.

4 Independência Linear e Posto de uma Matriz

Considere um conjunto de m vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ com o mesmo número de componentes. Uma **combinação linear** destes vetores é uma expressão da forma:

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_m \mathbf{a}_m$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_m$ são escalares. Considere agora a equação

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_m \mathbf{a}_m = 0$$

Uma possibilidade de satisfazer esta igualdade é definir todos os escalares $c_1, c_2, \dots, c_m = 0$. Se esta for a única forma possível de satisfazer a igualdade, então os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ formam um conjunto **linearmente independentes (L.I.)**.

Se a equação puder ser satisfeita com pelo menos um dos escalares sendo não-nulos, então ao menos um dos vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos demais e portanto é **linearmente dependente (L.D.)**. Por exemplo, considere que $c_1 \neq 0$, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{c_m}{c_1} \mathbf{a}_m$$

Ou seja, $\mathbf{a}_1$ é uma combinação linear dos demais vetores.

Como visto anteriormente, quando escrito na forma matricial, cada equação passa a ocupar uma linha da matriz. O número máximo de linhas linearmente independentes (equivalente ao número máximo de equações L.I.) é chamado de **posto (rank)** da matriz. O posto de uma matriz é invariante em relação às operações elementares apresentadas anteriormente. Por isso, uma das maneiras de determinar o posto da matriz é reduzir ela

para a forma escalonada e observar quantas linhas não nulas são obtidas. Além disso, pode-se mostrar que o posto de uma matriz $\mathbf{A}$ e o posto de sua transposta $\mathbf{A}^T$ são iguais.

Com base nos conceitos de dependência linear e posto de uma matriz, pode-se enunciar os seguintes teoremas:

Teorema 01: Considere p vetores com cada um possuindo n componentes. Estes vetores são linearmente independentes se a matriz formada utilizando estes vetores como linhas possuir um posto p . Em contrapartida, se estes vetores são linearmente dependentes, então o posto da matriz será menor que p .

Teorema 02: Considere p vetores com cada um possuindo n componentes. Se $n < p$, então estes vetores são linearmente dependentes.

Em analogia com os sistemas lineares, o Teorema 02 é equivalente a dizer que se existirem mais variáveis do que equações, algumas das equações serão linearmente dependentes. Outra forma de entender este teorema é analisar um espaço vetorial. Por exemplo, um espaço no $\mathbb{R}^3$ (como um sistema cartesiano x, y, z) será completamente definido por três vetores LI (por exemplo $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$). Qualquer outro vetor neste espaço poderá ser escrito como uma combinação linear destes.

5 Existência e Unicidade para Sistemas Lineares

Com base no conceito de posto de uma matriz, pode-se enunciar os seguintes teoremas sobre a existência e unicidade da solução de sistemas lineares.

Teorema 03 - Existência: Um sistema linear de m equações e n variáveis da forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

possui solução (ou seja, é consistente) se e somente se a matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ possuir o mesmo posto que a matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{b}$.

De modo geral, o Teorema 03 implica que a adição do vetor $\mathbf{b}$ como última coluna não altera a quantidade de linhas L.I. presentes na matriz. Como enunciado anteriormente, o posto de uma matriz e de sua transposta são equivalentes. Assim, pode-se interpretar o teorema acima como sendo equivalente a afirmar que a coluna $\mathbf{b}$ deve ser L.D. com relação as demais colunas da matriz aumentada. Por exemplo, considere um sistema com

$m = n = 2$, por simplicidade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

A matriz aumentada e sua transposta podem ser escritas como:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right] \quad \mathbf{A}|\mathbf{b}^T = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \end{array} \right]$$

Assumindo que o sistema possui solução, então existem valores x_1 e x_2 que satisfazem o sistema linear. Isto implica que a terceira linha da matriz transposta ($L3$) pode ser escrita como uma combinação linear das outras duas linhas ($L1$ e $L2$), da forma:

$$L3 = L1x_1 + L2x_2$$

Assim, a linha $L3$ é L.D. Caso não existirem valores x_1 e x_2 que possibilitem esta operação, o sistema não possui solução.

Teorema 04 - Unicidade: Um sistema linear de m equações e n variáveis da forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

possui solução única se e somente se o posto da matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ e o posto da matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ forem iguais a n . Se o posto destas matrizes for menor que n , o sistema possui infinitas soluções. Considerando que as matrizes possuam um posto r , estas infinitas soluções podem ser expressas em termos de $n - r$ parâmetros arbitrários, ou seja, irão formar um espaço de dimensão $n - r$. Por exemplo, se $n - r = 1$, as soluções irão depender de um parâmetro e serão representadas como uma reta, se $n - r = 2$ irão depender de 2 parâmetros serão representadas por um plano e assim sucessivamente.

O Teorema 04 pode ser também expresso da seguinte forma: um sistema linear irá possuir solução única somente quando existir uma equação L.I. para cada variável desconhecida. Este teorema pode ser analisado de forma diferente para sistemas homogêneos e não-homogêneos.

Considere um sistema homogêneo da forma:

$$\mathbf{Ax} = 0$$

Este sistema sempre irá admitir a solução trivial $\mathbf{x} = 0$. Pelo Teorema 04, se o posto r de $\mathbf{A}$ for igual ao número de variáveis n , então esta é a única solução possível. Soluções não-triviais irão existir se e somente se $r < n$, sendo que neste caso as soluções irão formar um espaço vetorial de dimensão $r - n$ (conhecido como espaço de solução).

Considere agora um sistema não-homogêneo da forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Além dos teoremas de existência e unicidade apresentados anteriormente, pode-se apresentar o seguinte teorema para este tipo de sistema:

Teorema 05: Se um sistema não-homogêneo é consistente, então todas as suas soluções podem ser obtidas da forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_0$$

onde $\mathbf{x}_h$ é a solução do problema homogêneo associado e $\mathbf{x}_0$ é alguma solução do problema não-homogêneo.

Como visto, o Teorema 05 é equivalente ao teorema que garante a solução de EDO's de segunda ordem não-homogêneas.

Resta agora uma questão a ser avaliada: como posso determinar o posto da matriz $\mathbf{A}$ para garantir que o sistema possui solução única?

Uma maneira de responder esta pergunta é simplesmente aplicando o método de eliminação de Gauss e buscando uma solução para o problema. Porém, uma estratégia mais sensata é primeiramente determinar se o problema possui solução para depois tentar encontrá-la.

Na grande maioria dos casos, estaremos trabalhando com casos onde $m = n$, ou seja, tem-se o mesmo número de equações e variáveis. Os métodos de resolução de EDP's, por exemplo, sempre irão gerar sistemas com $m = n$. Assim, a matriz dos coeficiente $\mathbf{A}$ usualmente será uma matriz quadrada. Neste caso, pode-se determinar se a matriz possui alguma linha L.D. calculando o *determinante* da matriz $\mathbf{A}$. Com base nisso, pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 06: Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ $n \times n$ possui posto n se e somente se:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Exemplo 02: Determine se o seguinte sistema linear possui solução única. Caso possuir, encontre a solução.

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 14$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$

Primeiramente, deve-se avaliar se o problema possui solução. Para isso, pode-se avaliar o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = (1)(-1)(-1) + (3)(-3)(4) + (5)(2)(5) - (5)(-1)(4) - (3)(2)(-1) - (1)(-3)(5)$$

$$\det \mathbf{A} = 1 - 36 + 50 + 20 + 6 + 15 = 56$$

Portanto, o determinante é diferente de zero, o que implica que a matriz é L.I.

Avaliando a matriz aumentada para aplicar o método de redução de Gauss:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 7 \end{array} \right]$$

Zerando os termos na primeira coluna:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -7 & -13 & -25 \\ 0 & -7 & -21 & -49 \end{array} \right]$$

Deixando agora a matriz na forma escalonada:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -7 & -13 & -25 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{array} \right]$$

Assim, o sistema linear pode ser escrito como:

$$\begin{array}{lll} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 14 & \rightarrow & x_1 = 5 \\ -7x_2 - 13x_3 = -25 & \rightarrow & x_2 = -2 \\ -8x_3 = -24 & \rightarrow & x_3 = 3 \end{array}$$

References

- [1] Greenberg, M. D. Advanced Engineering Mathematics, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey: 1998;
- [2] Kreyszig, E. Advanced Engineering Mathematics, 10th ed., John Wiley and Sons, 2011.